UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS

SAMUEL RIBEIRO DA SILVA

# CONHECIMENTOS PROFISSIONAIS DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA SOBRE AS PROPRIEDADES DA IGUALDADE: UM PROCESSO FORMATIVO MEDIADO POR TAREFAS DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL

Recife - PE

2023

SAMUEL RIBEIRO DA SILVA

# CONHECIMENTOS PROFISSIONAIS DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA SOBRE AS PROPRIEDADES DA IGUALDADE: UM PROCESSO FORMATIVO MEDIADO POR TAREFAS DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL

Dissertação apresentada ao curso de Pós-graduação em Ensino das Ciências da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências.

Orientador: Profº Drº Jadilson Ramos de Almeida

Recife - PE
2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S586c Silva, Samuel Ribeiro da
Conhecimentos profissionais de futuros professores de matemática sobre as propriedades da igualdade: um processo formativo mediado por tarefas de aprendizagem profissional / Samuel Ribeiro da Silva. - 2023.
133 f. : il.

Orientador: Jadilson Ramos de Almeida.
Inclui referências e apêndice(s).

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências, Recife, 2023.

1. Mtsk. 2. Conhecimento profissional. 3. Formação inicial do professor de matemática. 4. Tarefa de aprendizagem profissional. 5. Propriedades da igualdade. I. Almeida, Jadilson Ramos de, orient. II. Título

CDD 507

SAMUEL RIBEIRO DA SILVA

# **Conhecimentos profissionais de futuros professores de matemática sobre as propriedades da igualdade**: um processo formativo mediado por tarefas de aprendizagem profissional

Dissertação apresentada ao curso de Pós-graduação em Ensino das Ciências da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências. Área de Concentração: Formação de professores e construção de práticas docentes no Ensino das Ciências e Matemática.

**Banca Examinadora**

**Dr. Jadilson Ramos de Almeida, UFRPE**
**Presidente**

**Drª Elisângela Bastos de Melo Espíndola, UFRPE**
**Examinadora interna**

**Dr. Alessandro Jacques Ribeiro, UFABC**
**Examinador externo à instituição**

Recife - PE

2023

Dedico este trabalho à minha esposa Fátima e
aos meus três amados filhos: Rodrigo, Samara e João!

# AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Deus e Pai por ter me dado esta oportunidade e forças para realizar um antigo sonho, e por estar sempre onipresentemente na minha vida.

Agradeço à minha mãe Vilma, ao meu pai Daniel (*in memoriam*), à minha família e aos amigos que sempre torcem/torceram por minhas conquistas.

Agradeço à minha esposa Fátima que esteve comigo desde o início, apoiando-me em tudo que precisei para executar este trabalho.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Jadilson Ramos, pela paciência, insistência e orientações desde o dia em que lhe fui apresentado pela professora Lúcia de Fátima Araújo (a quem também agradeço muito), que estava se aposentando, e passou-lhe essa incumbência.

Agradeço a todos professores do PPGGE, especialmente à professora Dra. Mônica Folena, os quais trouxeram tantas sugestões, apoio e ensinamentos valiosos para essa minha trajetória.

Agradeço à turma de 2020, e, em especial a dois colegas: Felipe Alexandre e Climéria Beserra, pessoas sensacionais que tanto contribuíram com suas dicas, ideias e comentários nas minhas dúvidas, nas tarefas e nos trabalhos das disciplinas do Mestrado.

Por fim, agradeço à professora Dra. Elisângela Espíndola e ao professor Dr. Alessandro Ribeiro que fizeram parte da banca de qualificação e de defesa e que trouxeram preciosas sugestões para o rumo que tomou esta pesquisa.

## RESUMO

Nesta pesquisa, buscamos compreender o conhecimento profissional de futuros professores de matemática sobre o conteúdo e o ensino das propriedades da igualdade para o 6º ano do Ensino Fundamental. Com abordagem qualitativa e interpretativa, nos moldes de uma pesquisa de intervenção, adotamos o *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK) como referencial teórico e também na análise dos dados descritivos, o qual assume que o conhecimento profissional do professor de matemática é especializado. A produção dos dados se deu por meio de um processo formativo mediado por uma Tarefa de Aprendizagem Profissional (TAP) e orquestrado pelo modelo das Oportunidades de Aprendizagem Profissional (OAP), cujo acrônimo em inglês é PLOT (*Professional Learning Opportunities for Teachers*). Os dados são provenientes das gravações em áudio, dos registros escritos e das interações discursivas ocorridas no percurso formativo, do qual participaram 19 licenciandos de matemática na fase exploratória (questionário) e 6, no momento formativo. Todos cursavam a disciplina Estágio Supervisionado Obrigatório III (ESO III) em uma universidade pública no estado de Pernambuco, participando também o professor da disciplina (professor formador). Os resultados mostraram indícios de que os licenciandos possuem, com relação às propriedades da igualdade: conhecimento do conteúdo matemático (KoT), embora não usem frequentemente a noção de equivalência na resolução de tarefas matemáticas; conhecimento da estrutura da Matemática (KSM), quando identificam conexões com conteúdos passados e futuros; conhecimentos da prática matemática (KPM), evidenciados em vários momentos; conhecimento de características da aprendizagem de matemática (KFLM), pois tentam interpretar erros e obstáculos dos alunos; conhecimento do ensino de matemática (KMT), ainda que não conheçam muitos recursos digitais para o ensino; conhecimento dos parâmetros da aprendizagem de matemática (KMLS), quando identificam os níveis de ensino relacionando-os com a tarefa proposta, contudo, há uma lacuna no que se refere ao conhecimento dos documentos curriculares oficiais, conforme verificado na análise do questionário prévio. Além disso, confirmamos o potencial formativo das Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP) para promoverem as Oportunidades de Aprendizagem Profissional (OAP), em vista de que, por meio das reflexões em torno da tarefa proposta, das interações discursivas e da mediação do professor formador, os futuros professores revelaram aprimorar seus conhecimentos.



**Palavras-chave**: MTSK. Conhecimento profissional. Formação inicial do professor de matemática. Aprendizagem profissional. TAP. Propriedades da igualdade.

## ABSTRACT

In this research, we seek to understand the professional knowledge of future mathematics teachers about the content and teaching of the properties of equality for the 6th year of Elementary School. With a qualitative and interpretative approach, along the lines of an intervention research, we adopted the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) as a theoretical framework and in the analysis of descriptive data, which assumes that the professional knowledge of the mathematics teacher is specialized. Data production took place through a training process mediated by a Professional Learning Task (TAP) and orchestrated by the Professional Learning Opportunities (OAP) model, whose acronym in English is PLOT (Professional Learning Opportunities for Teachers). Data come from audio recordings, written records and discursive interactions that took place during the training course, in which 19 Mathematics undergraduates participated in the exploratory phase (questionnaire) and six, in the training period. All were taking the Mandatory Supervised Internship III (ESO III) course at a public university in the state of Pernambuco, with the course teacher also participating (trainer teacher). The results showed evidence that undergraduates have, in relation to the properties of equality: knowledge of mathematical content (KoT), although they do not frequently use the notion of equivalence in solving mathematical tasks; knowledge of the structure of Mathematics (KSM), when they identify connections with past and future contents; knowledge of mathematical practice (KPM), evidenced at various times; knowledge of mathematics learning characteristics (KFLM), as they try to interpret students' errors and obstacles; knowledge of teaching mathematics (KMT), even though they do not know many digital resources for teaching; knowledge of the parameters of mathematics learning (KMLS), when they identify the levels of education relating them to the proposed task, however, there is a gap with regard to the knowledge of the official curriculum documents, as verified in the analysis of the previous questionnaire. Furthermore, we confirmed the formative potential of the Professional Learning Tasks (TAP) to promote the Professional Learning Opportunities (OAP), considering that, through reflections around the proposed task, discursive interactions and mediation by the trainer teacher, future teachers revealed to improve their knowledge.



**Keywords**: MTSK. Professional knowledge. Mathematics teacher's initial training. Professional learning. TAP. Equality properties.

## LISTA DE ABREVIAÇÕES E SIGLAS

BNC – Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

CNE – Conselho Nacional de Educação

CK - Conhecimento Específico do Conteúdo

EF – Ensino Fundamental

IDP – Interações Discursivas entre os Participantes

LDB – Lei de Diretrizes e Bases

KoT – Conhecimento dos Tópicos (ou Temas)

KSM – Conhecimento da Estrutura da Matemática

KPM – Conhecimento da Prática da Matemática

KMT – Conhecimento do Ensino da Matemática

KFLM – Conhecimento das Características de Aprendizagem da Matemática

KMLS – Conhecimento dos Parâmetros de Aprendizagem da Matemática

MK – Conhecimento Matemática

MTSK – Conhecimento Especializado do Professor de Matemática

OAP – Oportunidades de Aprendizagem Profissional

PAF – Papel e Ações do Formador

PCK – Conhecimento Didático do Conteúdo

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

PLOT – Professional Learning Opportunities for Teachers

PPGEC – Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências

SAEB – Sistema de Avaliação da Educação Básica

SAEPE – Sistema de Avaliação da Educação Básica de Pernambuco

TAP – Tarefa de Aprendizagem Profissional

## LISTA DE FIGURAS

## LISTA DE QUADROS

## SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

Nosso trabalho tem o propósito de fomentar discussões sobre o conhecimento e a aprendizagem profissional de futuros professores de matemática em razão da complexidade e da multiplicidade de desafios dessa fase da formação docente, que é a formação inicial, e frente a uma sociedade cada vez mais centrada na valorização do conhecimento, o que, por isso, demanda um ensino e uma aprendizagem de qualidade.

O conhecimento e a aprendizagem do professor são temas bastante relevantes na atualidade e que estão interligados ao desenvolvimento profissional docente, requerendo, portanto, o aprimoramento contínuo do professor para um ensino mais significativo, visando à aprendizagem eficaz dos estudantes, como verificamos no trabalho de Lautenschlager e Ribeiro (2014), cujos autores, em uma pesquisa relacionada com a formação continuada com 72 professores de matemática, no estado de São Paulo, apontam para a necessidade de serem

> investigados continuamente a formação do professor da Educação Básica, o desenvolvimento profissional para a docência, a formação pedagógica do professor e a avaliação dos processos de formação, sem que se desconsidere os conhecimentos específicos matemáticos [...] (LAUTENSCHLAGER; RIBEIRO, 2014, p. 24-25).

Assim, o ingresso no curso de mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências (PPGEC), na Universidade Federal Rural de Pernambuco, instituição em que também cursei a graduação em licenciatura em Matemática, colocou-me em contato com o Grupo de Pesquisa em História, Epistemologia e Didática da Álgebra – *Al Jabr*, coordenado pelo professor Dr. Jadilson Ramos de Almeida, meu orientador, em que participei de discussões sobre o ensino da matemática e, em particular, sobre a álgebra escolar.

Nos diversos textos apresentados para discussão e reflexão no grupo, observamos que a maioria das pesquisas analisadas mencionavam, recorrentemente, acerca das dificuldades que a Matemática, e em particular a álgebra, apresenta tanto no ensino como na aprendizagem no âmbito da educação básica.

Por exemplo, Pires (2012) relata que a Matemática é vista por grande parte da sociedade como sinônimo de problema, de dificuldade, de grande complexidade, e que apenas para alguns é dado o privilégio de dominá-la, seja por dom, por hereditariedade, por etnia, inteligência excepcional, crenças essas que também permanecem no meio educacional.

Se por um lado um dos possíveis motivos de exclusão social está relacionado ao fracasso escolar na disciplina Matemática, conforme a percepção de Lins e Gimenez (2001), por outro, a Matemática é reconhecida como um dos meios de inclusão social e ensiná-la é contribuir para a formação de cidadãos que atuam de forma participativa e comprometida na construção de uma sociedade mais justa e igualitária, como entendem Groenwald, Silva e Mora (2004), por esse motivo, entendemos a importância de pesquisas serem direcionadas para essa área do conhecimento.

Nessa visão, Coelho e Aguiar (2018) consideram que a álgebra, um dos ramos da Matemática presentes desde tempos remotos nas relações culturais e sociais da humanidade, tem sua contribuição reconhecida na formação do cidadão a tal ponto de a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018) transformá-la em uma unidade temática e propor que seu ensino venha a ser trabalhado a partir dos anos iniciais, mirando, contudo, o desenvolvimento do pensamento algébrico, cuja perspectiva é compartilhada por Almeida (2016; 2017), que orienta para a necessidade de o ensino e a aprendizagem da álgebra serem significativos, não apenas focados na utilização mecânica de símbolos vazios.

Observamos, ainda, as dificuldades por parte dos alunos em entender conceitos matemáticos ao verificarmos os índices apresentados pelo Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), na edição de 2017, os quais demonstram que 70% dos estudantes do 9º ano que participaram daquele teste apresentaram aprendizagem insuficiente em matemática e, quanto ao 5º ano, o nível de aprendizagem médio do país fica em 4 de 10 na Escala de Proficiência, conforme interpretação da Secretaria de Educação Básica do Ministério da Educação, ou seja, ainda se situa no limite inferior do nível básico, o que corrobora as análises de anos anteriores, de Câmara e Almeida (2015):

> Os resultados obtidos em avaliações de larga escala têm demonstrado a grande dificuldade dos alunos da escola básica no trabalho com álgebra. Os resultados dos estudantes nas provas do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) mostram que, nos itens referentes à álgebra nesses instrumentos, raramente os alunos atingem o índice de 40% de acertos. O Sistema de Avaliação da Educação Básica de Pernambuco (SAEPE) revela, em seus resultados, que apenas um em cada cinco estudantes do 9º ano do ensino fundamental consegue, por exemplo, identificar uma equação do 2º grau que expressa um problema. (CÂMARA; ALMEIDA, 2015, p. 541-542).

Portanto, na busca pelo tema para nossa investigação, identificamos na literatura dois pontos iniciais: a) diversos autores apontam as dificuldades dos alunos do ensino fundamental com relação à álgebra (TELES, 2002; LESSA, 2005, PONTE; BRANCO; MATOS, 2009), e b) o destaque dado pela BNCC a essa área, e, especificamente, ao objeto matemático igualdade e suas propriedades, a fim de que sejam desenvolvidas habilidades desde o 3º ano até o 7º ano do Ensino Fundamental desse conteúdo (BRASIL, 2018).

A partir disso, surgiram algumas inquietações: os professores de matemática estão preparados para essas mudanças curriculares? Eles conhecem o conteúdo e o ensino do conteúdo, as dificuldades dos alunos, as estratégias e os recursos que podem ser utilizados para atenuar essas dificuldades?

Essas questões levaram-nos a buscar trabalhos de pesquisa na linha de formação de professores, pelo que nos deparamos com autores que ressaltam que a formação docente se inicia bem antes da graduação, conforme Garcia (1999), sendo classificada por esse autor em quatro fases: pré-treino, inicial, principiante e contínua, e notamos que, dentre essas etapas, a formação inicial é uma das mais complexas, pois sofre influência da fase anterior, em que os graduandos eram alunos do ensino básico, e, por outro lado, interfere no ensino e na aprendizagem futura, quando o professor passará a lidar com a prática escolar diariamente.

Assim, com base nas pesquisas de García (1999), de Ponte (1994) e de Ponte (2002), entendemos que, para uma educação eficaz e de qualidade, há necessidade de que a formação inicial tenha bases sólidas, em vista de o professor ser elemento-chave no processo de ensino e de aprendizagem, em que o desenvolvimento profissional surge como uma das facetas da formação docente.

Garcia (1999, p. 9) indica que o desenvolvimento profissional dos professores “[...]tem uma conotação de evolução e continuidade que, em nosso entender, supera a tradicional justaposição entre formação inicial e formação contínua dos professores”.

Por sua vez, Ponte (2002, p.1) defende que a formação inicial está interligada com o desenvolvimento da profissão docente, pois afirma que “[...] A formação inicial de professores visa formar profissionais competentes para o exercício da profissão”.

Ponte (1994, p. 11) ainda reforça, referindo-se aos futuros professores, que “os conhecimentos e competências adquiridos antes e durante a sua formação inicial são manifestamente insuficientes para o exercício das suas funções ao longo de toda a carreira”.

Em vista dessas ponderações, detectamos a relevância em discutir as características que envolvem o processo de desenvolvimento profissional nessa fase inicial da formação do professor, porém, limitando nossa investigação às duas dimensões do desenvolvimento profissional na perspectiva de Richit (2021), que são o conhecimento e a aprendizagem profissional, devido aos objetivos e ao tempo para a consecução da nossa investigação, como será disposto mais adiante.

Essas duas dimensões são também fundamentadas em Blanco (2003, p. 53) que indica serem o conhecimento e a aprendizagem do professor os “pilares básicos que nos possibilitam poder tomar decisões na formação de professores a partir da educação matemática”.

Nessa direção, nossa pesquisa se fundamenta no conhecimento e na aprendizagem profissional dos professores de matemática, devido ao papel singular exercido por esse profissional no processo de ensino, como ressaltam Escudero, Flores e Carrillo (2012, p. 35), "...uma das linhas de pesquisas que respondem a este interesse se concentram no estudo do conhecimento e habilidades exigidas pelos professores para lidar com esse processo".

Para compreender a dimensão do conhecimento profissional do professor de matemática, utilizamos o modelo teórico, analítico e interpretativo *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK), proposto por Carrillo *et al*. (2014), que, derivado dos trabalhos de Shulman (1986 e 1987) e de Ball, Thames e Phelps (2008), apresenta, atualmente, um panorama de análise do conhecimento docente que abarca tanto os conhecimentos do conteúdo como os conhecimentos do ensino do conteúdo, conforme atestam Moriel Junior e Wielewski (2017), e que será detalhado no capítulo específico.

Com relação à dimensão da aprendizagem profissional, trabalhamos com o conceito das Oportunidades de Aprendizagem Profissional (OAP) na perspectiva de Ribeiro e Ponte (2020), os quais defendem que as OAP são momentos que, coletivamente, por meio de discussões e reflexões, os professores ampliam seus conhecimentos matemáticos e melhoram suas habilidades mediados por Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP).

As TAP são tarefas construídas intencionalmente para promover discussões, unindo a teoria e a prática escolar, e que têm grande potencial formativo (RIBEIRO; PONTE, 2020) e, por isso, no nosso entendimento, são instrumentos que promovem o desenvolvimento profissional docente.

Além disso, na nossa investigação, buscamos compreender o conhecimento e a aprendizagem de futuros professores de matemática concernentes aos anos finais, mais especificamente com relação ao ensino da álgebra no 6º ano do Ensino Fundamental, que, segundo Azevedo (2017), é um dos períodos de transição em que há fraco desempenho escolar.

Percebemos, então, que esse nível de ensino demanda maior atenção, como ratifica a pesquisa de Silva e Ribeiro (2014) cujos autores alertam sobre a existência de várias rupturas de caráter pedagógico e psicológico na passagem do 5º ano para o 6º ano do Ensino Fundamental.

Por exemplo, o sinal de igualdade aparece como um conceito bastante relevante e que necessita de uma "ressignificação" para minimizar as várias descontinuidades observadas pelos autores, a saber: a) na linguagem utilizada nas coleções de livros didáticos, objeto da investigação deles nesses dois níveis de ensino, em que letras e termos matemáticos são utilizados "como se fossem naturalmente compreendidos pelos estudantes"; b) no desconhecimento dos professores das especificidades que a outra etapa ensina; c) no fato de algumas pesquisas relatarem que os alunos do 6º ano passam a não mais ter interesse pela matemática (SILVA; RIBEIRO, 2014).

Com essa explanação, entendemos ser essencial promover discussões prementes sobre o desenvolvimento dos conhecimentos dos futuros professores no que tange ao conteúdo e ao ensino do conteúdo da igualdade e de suas propriedades, tanto devido às dificuldades dos alunos apresentadas nos trabalhos mencionados, como pela necessidade das adequações dos professores às novas propostas curriculares, e, principalmente, com o intuito de promover oportunidades de aprendizagem profissional aos futuros docentes, contribuindo, assim, para a melhoria do ensino e da aprendizagem da matemática escolar.

Norteados, então, por todas essas considerações, nossa pesquisa buscou responder à questão: que conhecimentos matemáticos e didáticos os futuros professores de matemática evidenciam e desenvolvem sobre a igualdade e suas propriedades, para o ensino do 6º ano do Ensino Fundamental, durante um processo formativo mediado por uma Tarefa de Aprendizagem Profissional?

Para direcionar especificamente nossa investigação, três perguntas surgiram, a saber: *i*) que conhecimentos prévios os futuros professores trazem para a formação inicial sobre a matemática, sobre a álgebra, sobre a igualdade e suas propriedades, e sobre os documentos curriculares oficiais? *ii*) quais conhecimentos profissionais são evidenciados por futuros professores de matemática sobre o conteúdo, a aprendizagem dos alunos, o ensino do conteúdo e os parâmetros de aprendizagem das propriedades da igualdade para o 6º ano do Ensino Fundamental? *iii*) de que forma um processo formativo, mediado por uma Tarefa de Aprendizagem Profissional, promove o desenvolvimento profissional de futuros professores de matemática?

Temos, portanto, como objetivos:

*i)* Geral

- Compreender o conhecimento profissional de futuros professores de matemática sobre o tema e o ensino da igualdade e das suas propriedades para o 6º ano do Ensino Fundamental por intermédio de um processo formativo mediado por uma Tarefa de Aprendizagem Profissional.

*ii)* Específicos

- Identificar os conhecimentos prévios dos futuros professores sobre a matemática, a álgebra, a igualdade e suas propriedades, e os documentos curriculares oficiais;
- Descrever o conhecimento profissional dos futuros professores de matemática sobre a igualdade e suas propriedades com relação ao conhecimento matemático e didático do conteúdo;
- Orquestrar um processo formativo, mediado por uma Tarefa de Aprendizagem Profissional, no sentido de oportunizar aprendizagem profissional aos futuros professores.

Assim, construímos nosso texto apresentando, no primeiro capítulo, a introdução em que expomos a justificativa, a relevância, a questão, o objetivo geral e os específicos da nossa pesquisa.

No segundo capítulo, discutimos vários aspectos da formação do professor, sobre a formação inicial do professor de matemática e sua inter-relação com o desenvolvimento profissional docente em duas dimensões: o conhecimento e a aprendizagem profissional.

No terceiro capítulo, refletimos sobre os conhecimentos docentes necessários para o ensino das propriedades da igualdade e suas relações com a álgebra, com o pensamento algébrico, com as noções, sentidos e contextos do símbolo de igualdade, e com o que a Base Nacional Comum Curricular propõe sobre o tema.

No quarto capítulo, tratamos do percurso metodológico que traçamos para consecução da pesquisa, além de indicar os sujeitos, o contexto e as ferramentas utilizadas para a produção dos dados.

No quinto capítulo, apresentamos os resultados e a análise dos dados e, no sexto capítulo, apresentamos as conclusões e considerações finais.

# 2. A FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Neste capítulo, explanaremos sobre a formação de professores, quanto ao aspecto histórico, às pesquisas relacionadas, às etapas em que essa formação acontece e à legislação que a rege.

Após, direcionaremos nossa atenção para a formação inicial do professor de matemática na perspectiva do desenvolvimento profissional docente nas dimensões do conhecimento e da aprendizagem profissional.

## 2.1 A formação de professores

A formação de professores é um tema bastante complexo e que vem sendo pesquisado nas últimas décadas com vários tipos de acepções e vertentes, conforme nos afirmam Saviani (2009), Oliveira e Fiorentini (2018), Ferreira (2013), Gonçalves, Mota e Anadon (2020) e Nascimento, Magalhães e Morais (2017).

Saviani (2009) relata que a preocupação com a formação de professores como "uma resposta institucional" surge no século XIX, na França, decorrente da necessidade de ser sistematizada uma instrução popular, daí vinda a expressão "Escolas Normais", e, mais tarde, a distinção entre Escola Normal Superior, para formar professores que ensinariam no "secundário", e Escola Normal Primária, para preparação de professores que ensinariam o "primário", ideia que se expandiu para outros países, inclusive no Brasil, após a independência.

São sintetizados, portanto, por Saviani (2009), dois modelos de formação de professores que se configuraram desde o advento das Escolas Normais até a Lei das Diretrizes Básicas (LDB), promulgada em 20 de dezembro de 1996: a) modelo dos conteúdos culturais-cognitivos: para este modelo, a formação do professor se esgota na cultura geral e no domínio específico dos conteúdos da área de conhecimento correspondente à disciplina que irá lecionar; b) modelo pedagógico-didático: contrapondo-se ao anterior, este modelo considera que a formação do professor propriamente dita só se completa com o efetivo preparo pedagógico-didático.

Notamos que essa configuração é a que prevaleceu até pouco tempo, com algumas modificações curriculares, como mais adiante será mostrado, porém, os problemas mais recorrentes detectados na formação docente é a desarticulação entre as disciplinas específicas e as didático-pedagógicas, além da distância entre a teoria e a prática. (OLIVEIRA; FIORENTINI, 2018).

Com relação às transformações que ocorreram e como foi compreendida a formação docente nas últimas décadas, encontramos no trabalho de Ferreira (2003) uma retrospectiva das investigações do período que vai de 1970 a 2000, com relação a programas de formação de professores, em que a autora indica que essas pesquisas acompanharam, em cada momento histórico, as concepções teóricas e sociopolíticas vigentes.

Por exemplo, antes do final da década de 1960, havia escassez nas pesquisas sobre a formação de professores de matemática devido a esse tema ser pouco valorizado pelas políticas públicas:

> A formação de professores, além dos cursos de licenciatura, consistia basicamente de programas emergenciais voltados para a solução de problemas com o número necessário de professores. Isso conduziu, por exemplo, à criação de esquemas de treinamento de emergência, de qualidade duvidosa [...] (FERREIRA, 2003, p.20-21).

Até o final dos anos de 1970, a teoria que predominava no meio acadêmico era a psicologia educacional, em que se valorizava o comportamento genérico dos professores e relacionava-se isso à aprendizagem dos alunos, vindo uma mudança nesse paradigma a partir da primeira metade da década de 1980, quando começou a predominar “os métodos naturalistas ou interpretativos” ligados ao pensamento do professor, e, assim, os cursos de formação foram sendo direcionados na visão de outras disciplinas como a antropologia, a sociologia, a filosofia, contudo, o foco continuava a ser direcionado para o desempenho dos estudantes, e voltado mais para o comportamento do professor (FERREIRA, 2003).

A partir da segunda metade dos anos 1980, a formação foi sendo compreendida como treinamento na prática escolar, e como educação na universidade, ou seja, o professor era considerado como um treinador no contexto escolar, e como uma profissão no contexto universitário, mas esse tipo de perspectiva não abarcou a realidade complexa da sala de aula, como afirma Ferreira (2003).

Dessa forma, as pesquisas concentraram-se no pensamento do professor (crenças, concepções, experiências de vida, valores próprios), sendo chamadas de “o paradigma do pensamento do professor”, direcionando a busca pela compreensão dos processos de conhecimentos gerados pelo docente e quais conhecimentos são adquiridos, contudo, as pesquisas miravam ainda as “inconsistências e inadequação do professor”, o que acarretava uma visão sem contexto do que deveria ser uma formação mais significativa (FERREIRA, 2003).

Dos anos 1990 até os dias atuais, predomina uma perspectiva mais globalizada, mais sistêmica, sendo consideradas as dimensões organizacionais, curriculares, didáticas e profissionais como instâncias que atuam no desenvolvimento profissional dos professores, em que o docente passa a ser “valorizado como um elemento nuclear no processo de formação e mudança” (FERREIRA, 2003, p. 25).

Gonçalves, Mota e Anadon (2020, p. 362) também indicam que, a partir dos anos 1990, as políticas públicas começaram a dar mais peso à formação dos profissionais docentes para adequar-se o “sistema educacional ao processo de reestruturação produtiva e aos novos rumos do Estado”.

Na atualidade, por exemplo, Nascimento, Magalhães e Morais (2017, p. 27), indicam que a formação docente deve estar associada ao que se entende por educação e sua atuação na sociedade “contemplando as dimensões pedagógica, didática, tecnológica e científica como componentes integrantes da formação dos professores”.

Na análise que fizeram das ações que pautam a formação docente, esses autores ressaltaram a íntima relação entre a formação inicial e o desenvolvimento profissional do professor, havendo analisado docentes do Brasil e de Portugal, e constatado que há predominância no Brasil de ser dada mais atenção às dimensões pedagógica e didática, enquanto que, em Portugal, prevalecem as dimensões tecnológica e científica, bem como esses pesquisadores apresentaram como um dos resultados que, nas concepções dos professores entrevistados, a mudança no currículo seria uma forma de contemplar esses contextos na formação e no desenvolvimento docente.

Com esse cenário, indagamos também: quando é que se inicia essa formação?

Encontramos no trabalho de García (1999) que a formação docente começa muito antes do ingresso na universidade, pois, ao mencionar a pesquisa de Feiman (1983), ele classifica em quatro fases a formação de professores, cada uma com seus objetivos, problemas e metodologias específicos, a saber:

a) Fase de pré-treino: abarca as experiências de ensino que os futuros professores tiveram na sua trajetória escolar, que “podem ser assumidos acriticamente” e, na maioria das vezes, influenciam inconscientemente nas ações futuras do professor;

b) Fase de formação inicial: refere-se à formação na graduação, à “etapa de preparação formal em uma instituição específica”, em que o futuro professor recebe os conhecimentos didáticos-pedagógicos, o conteúdo das disciplinas específicas e têm os primeiros contatos com as práticas docentes;

c) Fase de iniciação: é a fase do começo do exercício profissional, em que os professores “aprendem na prática, geralmente por meio de estratégias de enfrentamento”;

d) Fase de formação permanente: é a última fase e "inclui todas aquelas atividades planejadas por instituições ou pelos próprios professores para promover o desenvolvimento profissional e aperfeiçoamento de seu ensino" (GARCIA, 1999, p. 25-26).

Na nossa pesquisa, miramos nosso olhar para a formação inicial devido à complexidade detectada nessa fase por meio da literatura, o que nos mostrou a necessidade de um estudo mais profundo, bem como devido à delimitação da nossa questão de pesquisa.

Assim, encontramos em Cunha (2013) que:

> Por formação inicial entendem-se os processos institucionais de formação de uma profissão que geram a licença para o seu exercício e o seu reconhecimento legal e público. Os cursos de licenciatura, segundo a legislação brasileira, são os responsáveis pela formação inicial de professores para atuação nos níveis fundamental e médio e devem corresponder ao que a legislação propõe em relação aos seus objetivos, formatos e duração (CUNHA, 2019, p. 612).

Com relação à legislação mencionada por Cunha (2013), constatamos que, das Leis das Diretrizes Básicas, de 1996 até os dias atuais, foram estabelecidas resoluções que preconizaram mudanças na formação inicial de professores, dentre as quais destacamos o Plano Nacional de Educação, o PNE (2014-2024) e a Resolução nº 2, de 1º de julho de 2015, em que houve modificações significativas na disposição curricular dos cursos de licenciatura, como por exemplo, o aumento da carga horária para 3200 horas, dando-se mais ênfase às disciplinas que abordam a prática profissional.

Atualmente, a formação inicial do professor foi definida por meio da Resolução nº 2, de 20 de dezembro de 2019, e institui a Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica, denominada de BNC - Formação (BRASIL, 2019), a qual estabelece várias competências profissionais para os professores, em que destacamos:

> Art. 2º A formação docente pressupõe o desenvolvimento, pelo licenciando, das competências gerais previstas na BNCC - Educação Básica, bem como das aprendizagens essenciais a serem garantidas aos estudantes, quanto aos aspectos intelectual, físico, cultural, social e emocional de sua formação, tendo como perspectiva o desenvolvimento pleno das pessoas, visando à Educação Integral.
> Art. 3º Com base nos mesmos princípios das competências gerais estabelecidas pela BNCC, é requerido do licenciando o desenvolvimento das correspondentes competências gerais docentes.
> Parágrafo único. As competências gerais docentes, bem como as competências específicas e as habilidades correspondentes a elas, indicadas no Anexo que integra esta Resolução, compõem a BNC - Formação.
> Art. 4º As competências específicas se referem a três dimensões fundamentais, as quais, de modo interdependente e sem hierarquia, se integram e se complementam na ação docente. São elas:
> I - conhecimento profissional;
> II - prática profissional; e
> III - engajamento profissional.
> § 1º As competências específicas da dimensão do conhecimento profissional são as seguintes:
> I - dominar os objetos de conhecimento e saber como ensiná-los;

> II - demonstrar conhecimento sobre os estudantes e como eles aprendem;
> III - reconhecer os contextos de vida dos estudantes; e
> IV - conhecer a estrutura e a governança dos sistemas educacionais. (BRASIL, 2019, p.2).

Direcionamos nossa atenção, no entanto, às dimensões da ação docente indicadas no artigo 4º da resolução acima: o conhecimento profissional e a prática profissional, que interagem e se complementam, e são a base do que discutiremos adiante.

No próximo tópico, passaremos a tratar da formação inicial dos professores de matemática, que é o foco da nossa pesquisa.

## 2.2 A formação inicial do professor de matemática

Como visto anteriormente, García (1999) aponta que a formação dos professores se inicia muito antes da licenciatura, quando o sujeito aprende as disciplinas básicas ainda no período escolar, depois vem a parte formal do conhecimento na graduação, após isso, acontece o período de início da profissão, para chegar, por fim, ao período de consolidação da profissão, que é a formação continuada.

Na nossa pesquisa, focamos a formação inicial do professor que ensina matemática nos anos finais do Ensino Fundamental, observando o que Blanco (2003) descreve sobre a formação docente, em que informa tratar-se de uma área de grande diversidade de agentes que interagem e estão em constante evolução, como, por exemplo, a sociedade, as instituições, os pesquisadores, os professores e os alunos, levando a formação de professores ser vista como complexa e problemática.

De acordo com Ribeiro (2019), um dos problemas detectados quando começamos a buscar investigações sobre a formação inicial é de que há uma distância entre a matemática ensinada na universidade e a que os futuros professores passarão a lidar no contexto de prática profissional, e isso afeta o ensino e a aprendizagem dos alunos, como também explicam Oliveira e Fiorentini (2018, p. 3), “[...] a formação matemática ainda continua distanciada ou desarticulada da formação didático-pedagógica do futuro professor nos cursos de licenciatura em matemática”, o que é ressaltado por esses pesquisadores quando afirmam que isso acontece nas “práticas de ensinar e aprender matemática na escola básica”.

Os autores mencionam que, com algumas exceções, a maioria dos cursos de licenciatura em matemática é esquematizado em “dois polos distintos e isolados”: disciplinas teóricas e disciplinas práticas, sem diálogo ou articulação entre elas: o primeiro, em que os conhecimentos matemáticos são privilegiados, “negligenciando o papel da prática como geradora de conteúdos de formação", e, o segundo, em que há mais ênfase no fazer pedagógico, os quais não consideram os conhecimentos gerados pelas pesquisas científicas e que "poderiam trazer novas significações e compreensões sobre as práticas de ensinar e aprender matemática." (OLIVEIRA; FIORENTINI, 2018, p. 3).

Nascimento, Magalhães e Morais (2009, p. 26-27) reforçam essas ideias de Ribeiro (2019) e de Oliveira e Fiorentini (2018) quando conjecturam que a formação inicial é o *locus* em que o sujeito mantém contato com o conhecimento científico, por meio do qual constrói seus conhecimentos profissionais, e recomendam que os cursos de formação inicial devam ser mais bem organizados "para ter eficácia e demonstrar ligação entre o trabalho do professor e a aprendizagem dos estudantes".

Autores como García (1999) e Nascimento, Magalhães e Morais (2017) também defendem que a formação inicial tem importância fundamental para criar o cenário para as próximas etapas que é o trabalho do professor na escola.

Santana, Serrazina e Nunes (2019, p. 13) fundamentam que "é preciso que a formação proporcione um diálogo com a prática do professor na sala de aula" e que isso está diretamente relacionado com: o conhecimento didático, que se refere à teoria e à metodologia e que auxiliam na prática em sala de aula; a prática em si, que são as atividades diárias e que acontecem socialmente; o conhecimento curricular da matemática, que são as prescrições contidas nos documentos oficiais curriculares, o que se coaduna com o que acreditamos ser as dimensões basilares na formação docente, as quais promovem o desenvolvimento profissional do professor ou do futuro professor de matemática.

Além disso, na pesquisa de Nascimento, Magalhães e Morais (2017), e também na de Oliveira e Fiorentini (2018), verificamos que esses problemas interferem na prática dos professores e que estão relacionados com a formação inicial, ou seja, tanto a desarticulação das disciplinas do currículo, como a distância entre a teoria e a prática influenciam na forma como os futuros professores ensinarão seus alunos.

Oliveira e Fiorentini (2018, p. 3) acrescentam que, mesmo com as reformas curriculares nas licenciaturas, como mencionamos nos tópicos anteriores, ainda persiste a ideia de que "a formação matemática e a formação para o ensino de matemática são blocos estanques e que pouco dialogam entre si".

Nascimento, Magalhães e Morais (2017) também apontam que:

> A formação inicial do professor deve estabelecer vínculos com a escola, auxiliando na reflexão sobre a realidade social ampla e os fundamentos teóricos, para que o cotidiano não se torne alienante, dando possibilidade à construção da autonomia,

> tendo, ainda, o reconhecimento do valor humano envolvido na formação e nas relações dos formadores e estudantes. Toda produção intelectual é baseada em uma aprendizagem individual e coletiva em que, ao ensinar, também aprendemos, pois quanto mais sólida for a teoria que orienta os saberes da prática educativa, mais eficaz será a atividade docente. O professor deve refletir sobre sua prática, porque as novas concepções apontam para a necessidade da formação de um professor reflexivo, que repense os saberes, ressignificando a formação e a prática. (NASCIMENTO; MAGALHÃES; MORAIS, 2017, p. 28).

Da mesma forma, Ferreira (2003, p. 32) reforça que, desde os últimos anos do século XX, os pesquisadores vêm procurando compreender os temas ligados à licenciatura a partir “da visão, da opinião, das concepções, das crenças e das representações dos licenciandos e dos professores envolvidos”, e essas pesquisas apontam deficiências no processo de formação inicial, porém, apresentam como mudanças necessárias a reflexão, o trabalho colaborativo e uma relação mais sincronizada entre teoria e prática.

Na mesma visão de Ribeiro (2019), entendemos que uma das possibilidades da aproximação entre a teoria e a prática está em oportunizar momentos formativos com o intuito do desenvolvimento profissional dos professores, ou seja, criar condições para aproximar a matemática universitária da matemática escolar.

Assim, baseados nas ideias dos autores citados, uma das perspectivas que assumimos é que o desenvolvimento profissional do futuro professor de matemática seja estimulado nas instituições formadoras, a fim de que haja uma articulação entre o que se aprende na universidade e a matemática que se ensina na escola.

No próximo tópico, trataremos do desenvolvimento profissional docente e sua relação com a formação inicial.

## 2.3 O desenvolvimento profissional do professor

Nas últimas décadas, vários autores, tais quais Fiorentini e Crecci (2013), Passos et. al (2006), Albuquerque e Gontijo (2013), Menezes e Ponte (2006), Ferreira (2003), García (2009), Nascimento, Magalhães e Morais (2017) e Richit (2021) buscaram caracterizar o desenvolvimento profissional como um processo contínuo que apresenta o professor como sujeito ativo na busca de aprimorar seus conhecimentos profissionais nos mais variados contextos individuais e coletivos.

Na literatura, o conceito de desenvolvimento profissional docente foi incorporado para ressaltar o “processo de aprendizagem e desenvolvimento do professor” em vez de seu processo de formação tradicional, ou seja, “surge para demarcar uma diferenciação com a ideia de formação docente baseada em cursos que não estabelecem relação com o cotidiano e com as práticas profissionais" (FIORENTINI; CRECCI, 2013, p. 11).

Por exemplo, Passos *et. al* (2006) indicam o desenvolvimento profissional como o:

> "[...] crescimento pessoal ao longo da vida, compreende também a formação profissional (teórico-prática) da formação inicial — voltada para a docência e que envolve aspectos conceituais, didático-pedagógicos e curriculares — e o desenvolvimento e a atualização da atividade profissional em processos de formação continuada após a conclusão da licenciatura." (PASSOS *et al*., 2006, p. 195).

Albuquerque e Gontijo (2013), baseados nos estudos de Imbernón (2010), esclarecem que a formação docente e o desenvolvimento profissional, embora se aproximem no conceito, são ideias distintas, e que a formação inicial e a continuada estão inseridas no desenvolvimento profissional.

Menezes e Ponte (2006, p. 6) indicam que o desenvolvimento profissional é um processo contínuo de interação entre vários contextos e situações de natureza individual ou coletiva e envolve "um diálogo incessante entre a teoria e a prática, apoiado na reflexão crítica".

Nesse caminho, assumimos o que Nascimento, Magalhães e Morais (2017, p. 27) afirmam de que a formação e o desenvolvimento profissional "se sustentam na busca de compreender e superar as necessidades da própria profissão".

Além disso, Ferreira (2003, p. 35) entende que, na perspectiva do desenvolvimento profissional, o professor torna-se "sujeito ativo e responsável pelo seu crescimento e formação contínuos" num encadeamento que tem seu início muito antes da licenciatura e que continua durante o caminho que é traçado na sua vida profissional, sendo um processo

> que se desenrola por meio de um contínuo movimento de dentro para fora, valorizando o professor pelo seu potencial, no qual a prática é a base para um relacionamento dialético entre teoria e prática e, muitas vezes, ponto de partida. (FERREIRA, 2003, p. 35).

Nossa pesquisa, portanto, direciona-se para a formação inicial dos professores de matemática, fundamentando-se na perspectiva do desenvolvimento profissional, conforme García (2009) nos esclarece que:

> Nos últimos tempos, tem se vindo a considerar o desenvolvimento profissional como um processo a longo prazo, no qual se integram diferentes tipos de oportunidades e experiências, planificadas sistematicamente para promover o crescimento e desenvolvimento do docente.(GARCÍA, 2009, p. 7).

Compactuamos, assim, com a visão de que a construção do conhecimento didático e pedagógico especializado é uma das dimensões do desenvolvimento profissional docente, sendo uma das tarefas das instituições formadoras oportunizar, na formação inicial, condições para que os futuros professores venham a consolidar o processo de desenvolvimento profissional. (NASCIMENTO; MAGALHÃES; MORAIS, 2017).

Nessa perspectiva, e por meio da revisão sistemática de literatura feita por Richit (2021), conforme esquema na figura 1, observamos cinco dimensões que fundamentam o desenvolvimento profissional relacionadas à formação de professores:

*i*) conhecimento profissional: subsídios basilares à docência;

*ii*) aprendizagens profissionais: aprofundamento e ampliação de conhecimentos docentes;

*iii*) cultura profissional: valores, hábitos e práticas legitimadas por grupos de professores;

*iv*) dimensão ética da docência: compromisso individual e coletivo com a superação das desigualdades de oportunidades educativas e sociais;

*v*) mudanças na prática: processos de crítica e modificação das práticas de sala de aula, crenças e disposições de professores.

**Figura 1: Dimensões do desenvolvimento profissional**


Fonte: Richit (2021, p.15)

Reiteramos que, para alcançar os objetivos da nossa pesquisa, restringimos nossa investigação às duas das dimensões do desenvolvimento profissional indicadas por Richit (2021), a saber: o conhecimento e a aprendizagem profissional dos futuros professores de matemática.

Buscamos também compreender a relevância dessas duas dimensões do desenvolvimento profissional docente nas pesquisas de Blanco (2003), Ferreira, Ribeiro e Ribeiro (2017), Pazuch, Lima e Albrecht (2018), Carrillo *et al*. (2014) e Ribeiro e Ponte (2020).

Blanco (2003, p. 73), por exemplo, argumenta que é "fundamental que os futuros professores tenham conhecimento profundo e compreensão da matemática do currículo escolar e de como ela vincula-se à disciplina matemática", além de que esse conhecimento deve estar relacionado aos contextos do ensino da matemática que envolvam o professor, o aluno, o conteúdo e a aula.

Ferreira, Ribeiro e Ribeiro (2017, p. 497), nos indicam que o conhecimento do professor, "tanto no saber como no saber fazer", configura-se como "elemento central nas aprendizagens dos alunos" e afeta diretamente a aprendizagem e o sucesso dos estudantes.

Com essa mesma ideia, Pazuch, Lima e Albrecht (2018) ressaltam a relevância do conhecimento dos professores de matemática na construção da formação profissional e relacionam o desenvolvimento profissional do professor com o conhecimento matemático e didático que ele possui ou deva possuir para o ensino ser significativo.

Nos próximos tópicos, trataremos das duas dimensões do conhecimento profissional docente, em que focaremos o conhecimento especializado do futuro professor de matemática na visão de Carrillo *et al*. (2014).

Após, falaremos da dimensão das aprendizagens profissionais, sob a ótica de Ribeiro e Ponte (2020), quando explanaremos sobre as Oportunidades de Aprendizagem Profissional (OAP), as quais trazem a noção clara de que o desenvolvimento profissional docente está entrelaçado também com a aprendizagem e o conhecimento profissional do professor, e, por fim, exporemos sobre as Tarefas de Aprendizagem Profissional, artefatos que têm potencial para serem utilizados na formação de professores, visando o desenvolvimento profissional, e que trazem elementos de aproximação, de articulação e de diálogo entre a teoria e a prática.

## 2.4 O conhecimento profissional do professor de matemática

Neste tópico, trataremos sobre uma das dimensões do desenvolvimento profissional docente que é o conhecimento profissional do professor (BLANCO, 2003; RICHIT, 2021), iniciando com a perspectiva dos trabalhos de Shulman (1986 e 1987) de Ponte (1994, 1999 e 2012), e, por fim, sobre o conhecimento profissional do professor de matemática, o qual será embasado na perspectiva do MTSK de Carrillo *et al*. (2014), modelo refinado das ideias de Ball, Thames e Phelps (2008).

### 2.4.1 O conhecimento profissional do professor

Nos anos de 1980, na sua pesquisa sobre o desenvolvimento e formação de professores, por meio de indagações como: “De onde vêm as explicações do professor? Como professores decidem o que ensinar, como representam isso, como questionam os alunos sobre isso e como lidam com problemas de incompreensão?”, Shulman (1986, p. 8-9) formulou a base para o conhecimento docente e classificou, inicialmente, o conhecimento docente em: conhecimento específico do conteúdo, o conhecimento curricular e o conhecimento pedagógico do conteúdo.

Posteriormente, Shulman (1987) acrescentou outras categorias à classificação feita, o que se tornou a Base de Conhecimentos para o Ensino, que abarcava:

- conhecimento específico do conteúdo;
- conhecimento pedagógico geral;
- conhecimento do currículo;
- conhecimento pedagógico do conteúdo;
- conhecimentos sobre os alunos;
- conhecimento dos contextos educacionais e
- conhecimento sobre objetivos educacionais.

Dessas sete categorias, Shulman (1987, p. 8) aponta que o conhecimento do conteúdo pedagógico (PCK) “é de especial interesse” para o ensino, pois engloba, ao mesmo tempo, o conteúdo e a pedagogia, ou seja, é o conhecimento da forma como o conteúdo específico, os “problemas ou questões são organizados, representados e adaptados para os diversos interesses e aptidões dos alunos, e apresentados no processo educacional em sala de aula”, ou, em outras palavras: é o conhecimento que faz com que um conteúdo seja ensinável.

Com essa mesma perspectiva, Ponte (1999, p. 3), defende que o conhecimento profissional docente “inclui uma parte fundamental que intervém diretamente na prática letiva [...] essencialmente orientado para a ação”, havendo esse autor citado quatro domínios que entende fazer parte desse conhecimento:

> (1) o conhecimento dos conteúdos de ensino, incluindo as suas inter-relações internas e com outras disciplinas e as suas formas de raciocínio, de argumentação e de validação; (2) o conhecimento do currículo, incluindo as grandes finalidades e objetivos e a sua articulação vertical e horizontal; (3) o conhecimento do aluno, dos seus processos de aprendizagem, dos seus interesses, das suas necessidade e dificuldades mais frequentes, bem como dos aspectos culturais e sociais que podem interferir positiva ou negativamente no seu desempenho escolar; e (4) o conhecimento do processo instrucional, no que se refere à preparação, condição e avaliação da sua prática letiva. (PONTE, 1999, p. 3).

É enfatizada, portanto, por esses autores, a natureza específica do conhecimento necessário para o professor exercer a sua prática pedagógica; porém, a abordagem baseada na perspectiva de Lee Shulman é genérica, ou seja, abarca os docentes de todas as áreas do conhecimento.

Direcionando o conceito de conhecimento profissional ao que se refere à docência em Matemática, que é um dos focos da nossa investigação, identificamos em Ponte (2012, p. 1) que a qualidade do ensino e da aprendizagem de Matemática está inter-relacionada com uma formação matemática docente também de qualidade, tanto no campo do conhecimento matemático como no da didática, por isso, é dito que “o professor constitui um elemento decisivo no processo de ensino-aprendizagem”.

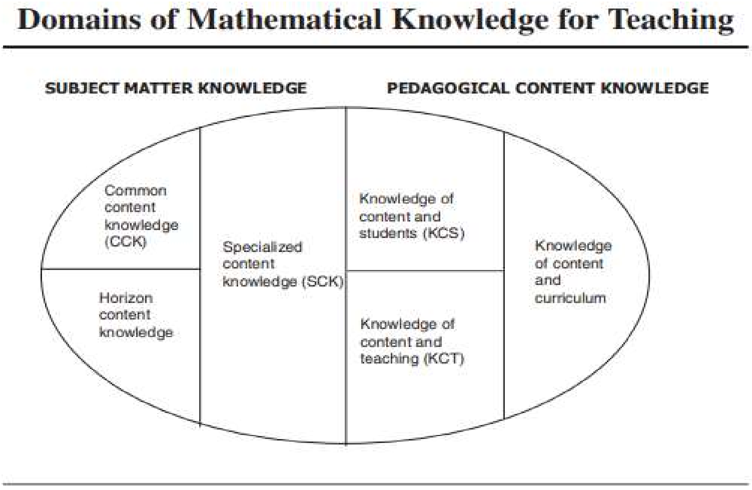
Ponte (2012, p. 3) esclarece que esse conhecimento profissional docente se diferencia tanto do conhecimento acadêmico, que ele chama “de cunho essencialmente teórico, declarativo ou formal”, quanto do senso comum, ou seja, esse tipo de conhecimento é próprio dos “professores de Matemática – que, embora sujeito a múltiplas influências, assume uma especificidade própria em função da sua atividade e das condições em que esta é exercida”.

O conhecimento profissional do professor de Matemática se assenta, assim, na atividade prática, que é o ato de ensinar a Matemática a grupos de alunos, e essa dimensão é apoiada em mais duas: na teoria “sobre a Matemática, a educação em geral e o ensino da Matemática”, e no conhecimento de natureza social e da experiência “sobre os alunos, a dinâmica da aula, os valores e a cultura da comunidade envolvente, a comunidade escolar e profissional, etc.” (PONTE, 2012, p. 3).

A fim de chegar ao modelo analítico e interpretativo que utilizamos nesta pesquisa, e que será detalhado mais adiante, observamos a pesquisa de Ball, Thames e Phelps (2008), os quais reconfiguraram, para a área da matemática, o modelo de Shulman (1987), denominando de *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT), que é o conhecimento do professor de matemática para o ensino.

No modelo de Ball, Thames e Phelps (2008), a divisão entre o CK - Conhecimento Específico do Conteúdo e o PCK - Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, ganham três domínios, cada, conforme figura 2.

**Figura 2: Estrutura do MKT**




Fonte: Ball, Thames, Phelps (2008, p. 403)

Ball, Thames e Phelps (2008) descrevem os três subdomínios do CK como: *i*) *Common content knowledge* (CCK), Conhecimento Comum do Conteúdo, o qual se refere ao conhecimento que está além da matemática que se ensina, aquele que as pessoas usam no seu dia a dia, nas funções que exercem no cotidiano. Por exemplo, o conhecimento matemático que um contabilista, um vendedor ou qualquer profissional usa no seu labor diário; *ii*) *Horizon content knowledge* (HCK), Conhecimento do Conteúdo no Horizonte: é o conhecimento de como os conceitos relacionados ao conteúdo foram formados; *iii*) *Specialized content knowledge* (SCK), Conhecimento Especializado de Conteúdo, que corresponde ao conhecimento que se refere ao trabalho apenas do professor de matemática, isto é, que não é usado para outras finalidades além do ensino.

O PCK, na visão de Ball, Thames e Phelps (2008), também é dividido em três subdomínios: *i*) Knowledge of content and students (KCS), Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes: refere-se ao conhecimento sobre as dificuldades, erros, estratégias que os alunos utilizam na resolução de problemas matemáticos; *ii*) *Knowledge of content and teaching* (KCT), Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (KCT): é o conhecimento que o professor possui em unir o conhecimento do conteúdo matemático e como organizar esses conteúdos em aulas, tarefas etc.; *iii*) Knowledge of content and curriculum (KCC), Conhecimento do Conteúdo e do Currículo: refere-se ao conhecimento de como estão estruturados o conteúdo no currículo. (PAZUCH; LIMA; ALBRECHT, 2018. p.364, tradução desses autores).

Posteriormente, Carrillo *et al*.(2014) refinaram as ideias do MKT e conceberam o modelo teórico e analítico utilizado nesta pesquisa, o *Mathematics Teacher’s Specialized*

*Knowledge* (MTSK), assumindo que “a natureza especializada define todo o conhecimento em consideração”, conforme observamos em Pazuch e Ribeiro (2017, p. 476).

No próximo tópico, passamos a descrever o modelo proposto por Carrillo *et al.*(2014) e que será aquele utilizado para embasar nossa análise e interpretação do conhecimento profissional dos futuros professores.

### 2.4.2 O modelo teórico, analítico e interpretativo MTKS

Observando que, no modelo proposto por Ball e colaboradores, apenas uma parte, relacionada ao Conhecimento Pedagógico (CK), era considerada especializada, Carrillo *et al.* (2014) iniciaram a construção de um modelo analítico e interpretativo que denominaram *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK), traduzido como Conhecimento Especializado do Professor de Matemática, o qual “... traz consigo a perspectiva de que todo conhecimento nele contido deve ser especializado”, assim como clarificam Moriel Junior e Wielewski (2017, p. 130).

Na tese de Ribeiro (2021), encontramos que os idealizadores do MTSK fazem uma diferenciação com relação ao PCK, os quais começam a denominar o segundo domínio do modelo de “Conhecimento Didático do Conteúdo”, trazendo o foco para o ensino específico da matemática, o que é corroborado no trabalho de Carrillo e Martín (2019), os quais explicam que o MTSK não pretende ser um modelo que abarque todo o conhecimento do professor (por exemplo, com relação à pedagogia geral), mas apenas aquele que é delimitado pela matemática.

Nos trabalhos de Carrillo *et al.* (2014), de Moriel Junior e Wielewski (2017) e de Clemente *et al.* (2021), são indicados três domínios assim caracterizados: *i*) o conhecimento matemático (MK); *ii*) o conhecimento didático do conteúdo (PCK); e *iii*) as crenças ou concepções sobre matemática e sobre seu ensino e aprendizagem.

O Conhecimento Matemático (MK) é composto por três subdomínios, conforme descritos por Moriel Júnior e Carrillo (2014, p. 466-467):

a) O conhecimento dos tópicos matemáticos (KoT) - “inclui conteúdos matemáticos a serem ensinados [...] e seus diferentes aspectos (incluindo definições, interpretações e propriedades de conceitos [...])”, além dos registros de representação (p. 466);

b) O conhecimento da estrutura da matemática (KSM) - nesse subdomínio “está conexões entre tópicos (avançados e elementares, prévios e futuros, de diferentes áreas matemáticas etc., exceto as de fundamentação previstas em KoT” (p.466);

c) O conhecimento da prática matemática (KPM) - abrange "maneiras de proceder em Matemática, incluindo modos de criar ou produzir na área (conhecimento sintático), aspectos da comunicação matemática, raciocínio e prova [...]" (p. 466).

O Conhecimento Didático do Conteúdo (PCK) também é subdividido em três subdomínios:

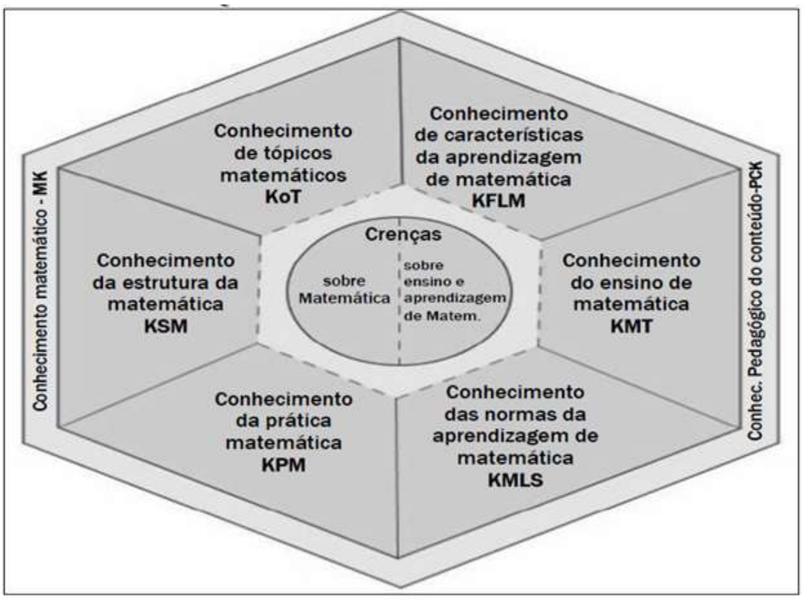
a) O conhecimento do ensino de matemática (KMT) - relaciona-se com "materiais, recursos, modos de apresentar um conteúdo e suas respectivas características [...] " (p. 467);

b) O conhecimento das características de aprendizagem de matemática (KFLM) - abarca de que forma "os alunos aprendem os conteúdos matemáticos (modelos e teorias formais ou informais), as características desse processo, erros comuns e suas fontes prováveis [...]" (p. 467);

c) O conhecimento dos parâmetros de aprendizagem de matemática (KMLS) - "se refere a especificações curriculares envolvendo o que está previsto em cada etapa da educação escolar em termos de conteúdos e competências [...] " (p. 467).

Ainda de acordo com Moriel Júnior e Carrillo (2014), as crenças são colocadas no centro dos subdomínios, conforme figura 3, pois "elas dão sentido às suas ações" (p.466).

**Figura 3: Domínios e subdomínios do MTSK**




Fonte: Moriel Júnior e Carrillo (2014, p. 466)

Além disso, observamos que conhecer um conteúdo é diferente de conhecer como ensinar o conteúdo, havendo várias situações em que para um certo contexto o professor pode revelar conhecimento matemático do conteúdo, e também conhecer o conhecimento didático do conteúdo, conforme verificamos em Ribeiro (2021), quando esse autor indica que os subdomínios do MTSK não estão desconectados ou estanques, mas interligados, ou seja, entre os subdomínios há “similaridades” que podem ser organizadas conjuntamente para a análise do conhecimento do professor, o que o autor chama de “focos de atenção”.

Como nos indica Cabanha (2018), por exemplo, com relação aos subdomínios KoT e KPM, em que esclarece que o professor se utiliza da demonstração, da definição, de símbolos usando o conhecimento KoT, mas precisa também conhecer o que significa, o que está implícito, o porquê da utilização que faz, e isso está no âmbito do subdomínio KPM (conhecimento da prática matemática).

Também encontramos em Policastro (2021) outro exemplo da interligação entre os subdomínios, em que a autora informa que o KMS (conhecimento das estruturas) é um subdomínio que complementa o KoT (conhecimento dos tópicos), indicando que, no KSM, o conhecimento está relacionado com as estruturas intraconceituais, ou seja, com outros conteúdos matemáticos passados ou futuros, já no KoT o conhecimento está relacionado às estruturas do próprio conteúdo matemático (intraconceituais).

Assim, no MTSK, o conhecimento profissional dos professores de matemática (na dimensão do conhecimento matemático e do didático) é considerado integralmente especializado, e os subdomínios são a caracterização desse conhecimento com suas especificidades próprias, embora interligadas entre si (CARRILLO *et al*., 2018; ALMEIDA; RIBEIRO; FIORENTINI, 2021).

De acordo com Monte, Ribeiro e Carrillo (2016), a base conceitual do MKTS encontra-se permeada, também, pelas próprias crenças e concepções que os idealizadores desse paradigma têm sobre a Matemática e seu ensino, ou seja, de que a Matemática é uma área do conhecimento dinâmica, a qual demanda estratégias heurísticas e conexões das mais variadas entre os conteúdos; também é baseada na visão da necessidade de interação do aluno com o conteúdo, o que exige do professor ações intencionais para promover essa interação; e, por fim, esse modelo tem uma visão relativista e social do conhecimento, em que entende o currículo organizado com propostas variadas, além de levar em consideração a experiência de colegas professores como fonte de conhecimento.

Com relação à consolidação do modelo, Moriel Júnior e Duarte (2019) mapearam a produção de pesquisas acadêmicas que utilizaram o referencial MTSK na base de dados Google Scholar, entre 2011 e 2019, e constataram um aumento considerável na produção de trabalhos tanto no Brasil como no mundo, o que torna evidente que esse modelo tem se revelado consistente como um instrumento eficaz na análise e interpretação do conhecimento profissional do professor de matemática.

Portanto, buscando pesquisas que tiveram como foco a formação inicial do professor de matemática e o modelo MTSK, encontramos nos trabalhos de Rodrigues e Teixeira (2021a), Rodrigues e Teixeira (2021b) e Lautenschlager e Balvin (2021) as potencialidades do modelo utilizado como instrumento teórico, analítico e interpretativo para inferir os conhecimentos profissionais de futuros professores.

Rodrigues e Teixeira (2021a, p. 315) fizeram um levantamento de dissertações e teses brasileiras e sugeriram que, devido às potencialidades do MTSK para "identificar e oportunizar a construção de conhecimentos especializados por professores e futuros professores, que ensinam Matemática", esse modelo também seja utilizado em processos de formação de professores em vários contextos.

Rodrigues e Teixeira (2021b), em uma pesquisa de natureza qualitativa e interpretativa, usaram o MTSK em uma investigação com três licenciandos de matemática de uma universidade estadual de Londrina/SP, e constataram "adequação do contexto formativo ao modelo".

Lautenschlager e Balvin (2021), em uma pesquisa de abordagem qualitativa, com enfoque analítico e interpretativo, tendo como resultado que os participantes evidenciaram possuir pouca familiaridade com as diferentes concepções de álgebra, utilizaram o MTSK para análise de um questionário aplicado a um grupo de 26 licenciandos de uma universidade pública do Rio Grande do Norte.

Com base nessas pesquisas, constatamos as potencialidades do MTSK para sua utilização na nossa análise que será descrita no capítulo específico.

Passamos, agora, à segunda dimensão do desenvolvimento profissional do professor de matemática, a aprendizagem profissional.

## 2.5 As Oportunidades de Aprendizagem Profissional (OAP)

Verificamos, por meio da literatura consultada no tópico anterior, que o conhecimento matemático e didático do professor de matemática afeta consideravelmente seu desenvolvimento profissional e a aprendizagem dos alunos. (PONTE, 2012).

Na visão de Ball e Cohen (1999), uma das incumbências docentes é a de ajudar, de forma eficaz, os alunos a se tornarem competentes, a desenvolverem habilidades e a entender o que estão fazendo, mas, para que isso aconteça, esses autores defendem que os professores precisam de oportunidades para ressignificarem suas práticas e examinar outras, bem como para aprender mais sobre os conteúdos e sobre os alunos que ensinam.

Um dos possíveis caminhos que encontramos, na literatura consultada, para minimizar o problema de desarticulação entre a teoria e a prática na licenciatura (OLIVEIRA; FIORENTINI, 2018), levando à uma aproximação dos futuros professores da matemática com a prática escolar (RIBEIRO, 2019), é a promoção das Oportunidades de Aprendizagem Profissional (OAP) na perspectiva de Ribeiro e Ponte (2020).

Por exemplo, no trabalho de Lauteschlager e Ribeiro (2017, p. 240), de abordagem qualitativa e interpretativa, em que investigaram o conhecimento de 10 professores de matemática para o ensino dos polinômios, esses autores observaram que: "As oportunidades de aprendizado dos professores devem favorecer que eles ampliem e aprofundem seu conhecimento matemático e sua habilidade que lhes permitirá ensinar matemática efetivamente".

Esse autores ressaltam a relevância e a urgência em ser promovidas ações de formação focadas tanto nos conhecimentos pedagógicos, como também nos conhecimentos específicos matemáticos, ao constatarem que os docentes participantes possuem um conhecimento que tende para os aspectos procedimentais e, muitas vezes, sem significado, e concluem sobre a necessidade de que sejam utilizados os procedimentos, mas que esses devam ser "fundamentados e justificados de um ponto de vista matemático e didático", pois defendem a profunda interligação entre a eficiência dos procedimentos e o que eles significam. (LAUTESCHLAGER; RIBEIRO, 2017, p. 259).

Em Trevisan, Ribeiro e Ponte (2020, p. 2, tradução nossa), observamos que as OAP são caracterizadas "como momentos coletivos em quais os professores trabalham e discutem situações matemáticas e didáticas para mobilizar diferentes dimensões de seu conhecimento profissional".[1]

Na nossa pesquisa, a fim de organizar um processo formativo, com o objetivo de promover oportunidades de aprendizagem profissional aos futuros professores, utilizamos o modelo PLOT (*Professional Learning Opportunities for Teachers*) (RIBEIRO; PONTE, 2020) na construção e na condução do momento formativo, cujo planejamento será detalhado no capítulo sobre o percurso metodológico.

[1] Tradução nossa do artigo em inglês "Professional learning opportunities regarding the concept of function in a practice-based teacher education program."

De acordo com esses autores, entendemos o caráter de intervenção do processo formativo com o objetivo de promover as OAP, pois elas são pensadas justamente com a intenção de trazer para o universo da formação de professores a articulação entre a teoria e a prática, além de terem, na sua característica principal, o objetivo de promover o desenvolvimento do conhecimento profissional, a fim de que professores ou futuros professores tenham contato com situações em que possam aprimorar a prática letiva.

Assim, o modelo teórico e metodológico PLOT é constituído de três domínios: a) Papel e Ações do Formador (PAF); b) Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP); e c) Interações Discursivas entre os Participantes (IDP) (RIBEIRO; PONTE, 2020, p. 4), de acordo com o esquema da Figura 4.

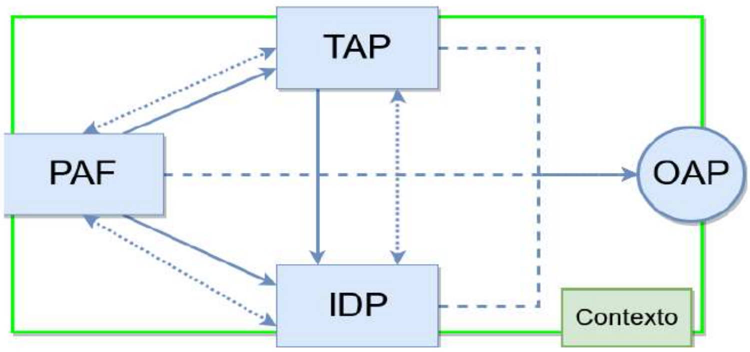
Portanto, a caracterização das três fases do modelo PLOT são:

I - Organização: momentos em que o formador, com a colaboração do pesquisador, elabora o processo formativo (seja no todo ou em partes) e constrói o design da(s) TAP e das potenciais IDP (Interações Discursivas entre os Participantes);

II - Desenvolvimento: momentos em que os participantes (formador e formandos) passam a interagir entre si, mediados pelo uso da(s) TAP e pela concretização das Interações Discursivas entre os Participantes (IDP);

III - Finalização: momento em que, por meio do processo aglutinador entre as três dimensões (PAF, TAP e IDP), se efetiva(m) a(s) OAP (Oportunidades de Aprendizagem Profissional) (RIBEIRO; PONTE, 2020, p. 4).

**Figura 4: Modelo PLOT**




Fonte: Ribeiro e Ponte (2020, p. 4)

De acordo com Ribeiro e Ponte (2020), na Figura 4 acima:

> • os retângulos representam as três dimensões (PAF, TAP e IDP), as quais estão distribuídas de forma conectada, mas obedecendo a uma lógica de continuidade/fluidez.
> • as flechas (contínuas, pontilhadas e tracejadas) indicam a continuidade/fluidez do processo e, de acordo com o sentido (direcional ou bidirecional), representam movimentos interativos entre os três domínios e que se alteram de acordo com a fase de operacionalização do modelo. As fechas contínuas indicam os movimentos na fase de organização; as fechas pontilhadas, os movimentos na fase de desenvolvimento; as flechas tracejadas, ao se unirem (entre as fases de desenvolvimento e efetivação) formam uma amálgama dos diferentes domínios, que acaba por desencadear em oportunidade(s) de aprendizagem do professor.
> • o círculo, representa a efetivação da criação da oportunidade de aprendizagem do professor.
> • o retângulo que envolve as demais componentes – o Contexto, representa a perspectiva situada de aprendizagem que sustenta teoricamente o modelo.(RIBEIRO; PONTE, 2020, p. 4-5).

Nesse sentido, defendemos, como descrito na pesquisa de Aguiar *et al*. (2021, p. 118), que o modelo PLOT: "busca dar suporte à organização e à implementação de processos formativos com vistas a proporcionar oportunidades de aprendizagens aos participantes".

No próximo tópico, falaremos especificamente sobre as Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP), apresentando seu conceito e suas características, bem como alguns trabalhos que as utilizaram como instrumento para promoção da aprendizagem profissional docente.

## 2.6 As Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP)

Entendemos, na perspectiva de Ribeiro e Ponte (2020), que as TAP são instrumentos de grande potencial formativo, pois contemplam a dimensão do conhecimento e da aprendizagem profissional docente; valorizam os registros de prática ao introduzirem, no ambiente de formação, trocas de experiências entre os participantes sobre suas vivências em sala de aula no contexto da educação básica, além de possibilitarem os formandos explorarem tarefas da matemática escolar nos seus aspectos matemáticos e didáticos.

Ribeiro, Aguiar e Trevisan, (2020, p. 55), baseados nas pesquisas de Ribeiro e Ponte (2019) e de Ball & Cohen (1999), consideram as TAP como "tarefas elaboradas com a finalidade de propiciar aprendizagens aos professores em uma situação específica".

Nessa perspectiva, Aguiar e Ribeiro (2022) entendem que o desenvolvimento e a aprendizagem profissional dos docentes têm potenciais de melhorar "conhecimentos, competências e atitudes", mostram que a busca pela compreensão sobre esse desenvolvimento, no que tange às oportunidades de aprendizagem docente, é um tema novo de investigação e defendem que essa aprendizagem está "distribuída entre indivíduos e artefatos" e indicam as tarefas preparadas para a formação como um exemplo desses artefatos.

Esses autores relatam, como resultados, que as TAP são potenciais instrumentos para fazer emergir discussões e promover ampliação nos conhecimentos de interpretação, de generalização e dos conhecimentos matemáticos dos professores; em uma pesquisa utilizando as TAP como artefatos mediadores, buscaram identificar e compreender como as OAP emergiram numa formação continuada em que 33 professores, sendo 7 em formação inicial e 26 formados, discutiram  e analisaram, de forma conjunta, aulas sobre padrões e regularidades na escola básica (AGUIAR; RIBEIRO, 2022).

Trevisan, Ribeiro e Ponte (2020, p. 2), fundamentados no trabalho de Ball & Cohen (1999), consideram a TAP como "um elemento promissor neste processo [...], construído a partir de artefatos da prática, como registros de trabalho dos alunos, documentação de sala de aula (imagens, áudios), materiais curriculares e notas dos professores." (p. 2, tradução nossa).

A essência das tarefas formativas são as discussões que se constroem em torno delas com relação às produções dos alunos, de forma que essas reflexões dialógicas desenvolvem no professor, ou no futuro professor, o conhecimento de interpretação da forma pela qual os estudantes raciocinam, o que acarreta melhoria para o ensino e a aprendizagem. (RIBEIRO; GIBIM; ALVES, 2021).

Conforme observamos no Workshop "Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP) e a Formação de Professores que Ensinam Matemática", que ocorreu em 2 de dezembro de 2019, em que foram compartilhados os resultados de pesquisas realizadas na Universidade Federal do ABC - UFABC, no grupo de pesquisa FORMATE, cujo coordenador é o professor Dr. Alessandro Jacques Ribeiro, foram indicadas as principais características das TAP:

• Exploratórias: são tarefas que levam o professor ou futuro professor de matemática a explorar e refletir as situações apresentadas;

• Instigantes: provocam o professor a analisar e refletir sobre erros, dificuldades e estratégias dos alunos;

• Possuem certo grau de dificuldade: não são tarefas imediatas, pois precisam de ser justificadas;

• Inovadoras: procuram trazer novidades, novas formas de olhar para o conteúdo a ser explorado;

• Intencionais: trazem na sua estrutura a intencionalidade com relação ao tema que quer despertar, tarefas com um propósito definido.

Ribeiro e Ponte (2020) definem duas dimensões em que as TAP estão inseridas: a dimensão conceitual e a dimensão operacional, resumidas no Quadro 1:

*i*) A dimensão conceitual diz respeito às bases teóricas que sustentam o instrumento em questão;

*ii*) A dimensão operacional refere-se à forma como elas são utilizadas.

**Quadro 1: Dimensões, componentes e características da TAP**

| Dimensão Conceitual | | Dimensão Operacional | |
|---|---|---|---|
| Componente | Característica | Componente | Característica |
| Conhecimento profissional | Explorar os conhecimentos matemáticos e didáticos dos professores relacionados às TME. | Tarefa Matemática | Contemplar tarefas matemáticas dos estudantes (TME) de alto nível cognitivo. |
| Ensino Exploratório | Possuir estrutura que propicie um ambiente de ensino e de aprendizagem exploratórios. | Registros de Prática | Envolver diferentes tipos de registros de prática organizados em forma de *Vignettes*. |

Fonte: Reproduzido de Ribeiro e Ponte (2020, p. 7)

Oliveira e Palis (2011, p. 345) indicam que esse tipo de tarefa possui grande potencial no desenvolvimento do conhecimento matemático e didático, que, segundo as autoras, são dimensões do conhecimento que não caminham de forma distinta, mas “em paralelo”. Portanto, tais tarefas são essenciais para ampliar a visão dos professores, ou futuros professores, além de trazer-lhes subsídios, no intuito de, quando da prática em sala de aula, valorizarem e considerarem, dentre outros aspectos, o raciocínio, as representações, as justificativas, as concepções, os erros e a criatividade dos alunos.

Também verificamos as potencialidades das tarefas de aprendizagem profissional no desenvolvimento profissional de docentes de matemática na pesquisa de Barboza, Pazuch e Ribeiro (2021), de abordagem qualitativa e interpretativa, que objetivaram compreender e explicar a construção do conhecimento matemático e didático de professores de matemática dos anos iniciais, num processo formativo em que participaram seis professores de uma escola situada no município de São Paulo/SP.

Esses autores obtiveram como resultados a mobilização, reorganização e construção de conhecimentos matemáticos e didáticos, ao produzirem dados documentais e em áudio provenientes de um processo formativo que constou na elaboração de uma aula com o tema “os diferentes significados do sinal de igualdade”, havendo os autores atribuído o resultado positivo ao uso das tarefas de aprendizagem profissional, ressaltando a importância da reflexão dos professores a partir dos questionamentos que advieram das interações discursivas e da mediação da formadora.

Assim, as TAP são compreendidas como instrumentos com potencialidade de promover a aprendizagem profissional aos professores, pois envolvem situações de prática docente atreladas a tarefas matemáticas dos estudantes, permitindo a “formulação de conjecturas matemáticas, sua validação, reformulação e mobilização de conhecimentos necessários à prática letiva” (BARBOZA, 2019, p. 126).

Da mesma forma, com relação ao uso de tarefas formativas para promoverem aprendizagem profissional docente, encontramos na pesquisa de Moriel Júnior e Wielewski (2021) as potencialidades que essas tarefas possuem no sentido de produzirem elementos de análise e de reflexão quando combinadas com as categorias do MTSK em um contexto de formação de professores.

Esses autores utilizaram o modelo MTSK como instrumento para organizar a tarefa profissional e oportunizar ações formativas com a finalidade de desenvolver o conhecimento profissional de professores no âmbito das frações e operações, de forma que analisaram as reflexões de um licenciando, em um recorte do momento formativo.

A partir das respostas desse futuro professor, obtiveram os possíveis caminhos formativos, aliando as dimensões do MTSK a estudos científicos diversos, como, por exemplo, recomendações curriculares sobre frações e operações, estudos sobre erros e dificuldades dos alunos, sobre ensino de conceitos e procedimentos etc. (MORIEL JÚNIOR; WIELEWSKI, 2021).

Entendemos, por meio desse capítulo, a relevância e a urgência de ser compreendido o conhecimento matemático e didático de licenciandos e de serem promovidas oportunidades de aprendizagem na formação inicial para o desenvolvimento profissional dos futuros docentes, a fim de que o ensino e a aprendizagem sejam eficazes e significativos.

Entendemos, também, que há necessidade de que, a partir da formação inicial, os licenciandos desenvolvam seu aprendizado profissional, em vista de as várias pesquisas mencionadas indicarem que o contato dos futuros professores com a prática, apenas cursando as disciplinas da licenciatura, é incipiente.

No próximo capítulo, faremos considerações sobre o conhecimento profissional para o ensino da igualdade e das suas propriedades e a importância desse objeto matemático ser discutido na formação inicial de professores de matemática para o ensino e a aprendizagem na matemática escolar.

# 3 CONHECIMENTOS DOCENTES E AS PROPRIEDADES DA IGUALDADE

Um aspecto que observamos na busca pelo delineamento da nossa pesquisa é a ênfase que, na unidade temática Álgebra, a BNCC dá às propriedades da igualdade, incluindo esse objeto matemático nas propostas curriculares desde o 3º ao 7º ano do Ensino Fundamental. (BRASIL, 2018).

Grande parte do conteúdo dos anos iniciais é centrada nos números e nas operações aritméticas e o primeiro contato dos estudantes com o símbolo de igual se dá por meio de atividades que utilizam a igualdade no contexto aritmético, de acordo com Cavalcanti e Santos (2007), ou seja, a igualdade, e em particular, suas propriedades é um objeto do conhecimento matemático de grande importância para o ensino e aprendizagem e que permeia toda a educação desde os primeiros anos escolares, como endossa Van de Walle (2009).

Diante disso, em vista de a nossa proposta de investigação focar-se na formação inicial de professores de matemática, em busca de identificar e de compreender os conhecimentos matemáticos e didáticos docentes na perspectiva do MTSK, surgiram alguns questionamentos como, por exemplo: que conhecimentos matemáticos e didáticos os futuros professores de matemática necessitam para o ensino das propriedades da igualdade no 6º ano do Ensino Fundamental?

Assim, neste capítulo, elencaremos alguns conhecimentos que compreendemos necessários para o futuro professor ensinar as propriedades da igualdade na escola básica, os quais encontramos na literatura consultada e que estão relacionados à Álgebra, ao pensamento algébrico, aos significados e aos sentidos do símbolo de igualdade, aos diversos contextos em que a igualdade é utilizada, às dificuldades dos alunos, às tarefas e aos recursos para o ensino, ao que diz a BNCC sobre esse objeto matemático e suas relações com o MTSK.

## 3.1 O conhecimento sobre a origem, história e concepções da Álgebra

Ao olharmos para a evolução da Álgebra na história e como essa área da matemática tomou forma na cultura humana, comparando com as dificuldades relatadas na literatura concernentes ao ensino e à aprendizagem, compactuamos com as ideias de Coelho e Aguiar (2018, p. 184) ao ressaltarem que “o entendimento de como as ideias se desenvolveram ao longo dos tempos é crucial para se discutir conceitos”.

Coelho e Aguiar (2018, p. 177) defendem a possibilidade de a história da Álgebra ser útil ao ensino e à aprendizagem dos estudantes para o desenvolvimento do pensamento abstrato, indicando que uma das características do processo evolutivo da Álgebra foi, ao contrário de outras ciências, haver se construído no “tratamento de questões concretas a questões abstratas”.

Assim, nessa mesma perspectiva, Almeida (2017) indica que a Álgebra é um conhecimento humano e historicamente situado, que levou séculos até chegar ao formato que nos é apresentado hoje em dia: “repleta de símbolos” e, apesar disso,

> essa informação muitas vezes não é levada em consideração quando se fala no ensino da álgebra na educação básica, em que se espera que o aluno se torne proficiente nessa linguagem em um curto espaço de tempo (ALMEIDA, 2017, p. 6).

Na literatura, há várias concepções da origem da Álgebra, por exemplo, autores feito Baumgart (1992) e Ponte, Branco e Matos (2009) indicam que a Álgebra tem sua origem relacionada às “técnicas de resolução de problemas” que eram utilizadas durante centenas de anos pelas antigas civilizações egípcia, babilônica, chinesa e hindu, de forma que não é um conhecimento que surgiu de uma só vez, mas foi historicamente e socialmente construído por meio da cultura de vários povos até se consolidar como uma área da matemática.

A palavra “álgebra”, na definição de Baumgart (1992), é uma variante latina da palavra *al-jabr* (ou *al-jebr*) utilizada pelo matemático árabe Mohammed ibn-Musa al-Khowarizmi, aproximadamente em 825 d.C., no título do livro *Hisab al-jabr w'al-muqabalah.*

Nos trabalhos de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) e de Baumgart (1992) é mencionado que podemos visualizar duas fases na história da Álgebra, a saber: *i*) a Álgebra antiga (elementar), cujo começo é reconhecido como proveniente da Babilônia e do Egito, e vai, aproximadamente, de 1700 a.C. a 1700 d.C., em que se tratou das equações e das técnicas de resolvê-las, e *ii*) a Álgebra moderna, que trabalha com as estruturas matemáticas tais quais os grupos, os anéis, os corpos etc.

Com relação à demarcação da evolução do simbolismo algébrico, que se caracteriza pela invenção gradual dos símbolos substituindo as palavras, a Álgebra é dividida, comumente, em três estágios: o retórico (ou verbal), o sincopado (em que eram usadas abreviações de palavras) e o simbólico (os símbolos usados como representação de palavras e ações). (BAUMGART, 1992; FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993).

Nasehpour (2018) acrescenta que no período verbal ou retórico as equações eram escritas com frases completas, e o período chamado sincopado tem início na obra *Arithmetica*, de Diofanto de Alexandria, matemático grego nascido entre 201 e 215 d.C. e falecido entre 285 e 299 d.C., cujo tipo de registro continuou a ser utilizado, posteriormente, no livro *Brahma Sphuta Siddhanta*, do matemático indiano Brahmagupta (598-670).

Ponte, Branco e Matos (2009) indicam que o período simbólico se inicia no século XVI com o trabalho de François Viète (1540-1603), e que, a partir da metade do século XIX, a Álgebra toma um novo rumo com a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra, havendo alguns matemáticos se voltado para o estudo das equações diferenciais e das funções, e, outros direcionado as investigações para o que se conhece hoje como Álgebra abstrata ou Álgebra moderna, que é o estudo das estruturas algébricas.

Nesse caminho, observamos que foi no século XIX que a Álgebra foi incorporada ao ensino brasileiro, fazendo parte das "tradicionais cadeiras de Aritmética, Geometria e Trigonometria" ministradas no "secundário", o qual correspondia aos Anos Finais do Ensino Fundamental atual, no entanto, da reforma Francisco Campos (1931), em que as quatro disciplinas foram reunidas com o nome "Matemática" até a metade da década de 1960, a Álgebra teve o programa curricular praticamente inalterado, cujos conteúdos eram: cálculo algébrico (operações com polinômios), razões e proporções, equações e inequações com uma incógnita, sistemas de equações, radicais, e as equações e o trinômio do segundo grau, contudo, sob um ensino "mecanizado e automatizado" (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992).

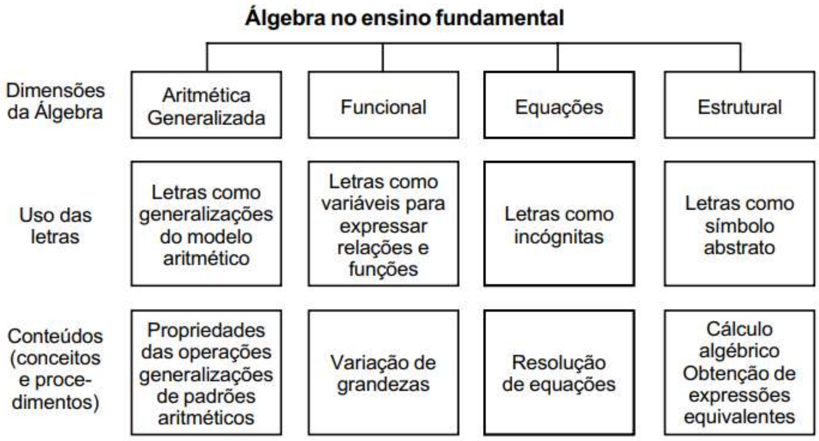
Com o advento da Matemática Moderna, movimento dos anos 1960 que, de acordo com Ponte, Branco e Matos (2009, p. 8), evidenciavam "apenas as propriedades das estruturas algébricas, nos mais diversos domínios", houve a tentativa de unificar os três campos: Aritmética, Álgebra e Geometria, e a Álgebra ganhou evidência, porém, devido ao excesso de formalismo, o ensino da Álgebra, "perdeu seu valor instrumental para resolução de problemas", conforme também relatam Miguel, Fiorentini e Miorim (1992, p. 52).

No fim dos anos 1990, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) trouxeram uma definição da álgebra escolar como uma oportunidade em que o aluno desenvolve a "capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas", por meio do "pensamento hipotético-dedutivo", em um trabalho articulado com a aritmética, cujo alvo é o ensino com significado (BRASIL, 1998, p. 115 e 117).

Os PCN também indicam haver um "razoável consenso de que para garantir o desenvolvimento do pensamento algébrico o aluno deve estar necessariamente engajado em atividades que inter-relacionem as diferentes concepções da Álgebra." (BRASIL, 1998, p. 116).

Os PCN sintetizam, conforme figura 5, as concepções de álgebra que propõem ser as dimensões que devam ser trabalhadas articuladamente para compreensão dos conceitos e procedimentos algébricos no ensino fundamental.

**Figura 5: concepções de álgebra segundo os PCN**




Fonte: Brasil (1998, p. 116)

Em Almeida (2017), no entanto, observamos que ainda prevalecem duas concepções de Álgebra escolar atualmente, a saber: *i*) a que se utiliza da linguagem simbólica apenas como uma manipulação mecânica de símbolos e técnicas para solução de equações (o autor cita, como exemplo, a técnica muito utilizada durante anos no ensino da Álgebra que é a regra de "mudança de sinal", quando se mudam números ou letras entre os membros de uma equação); *ii*) a que assume a Álgebra escolar como "uma forma peculiar de pensar", ou seja, em que o foco é o pensamento algébrico.

Referenciamos nossa pesquisa no contexto da Álgebra com o sentido de "álgebra escolar" na visão de Almeida (2017), ou seja, aquela álgebra desenvolvida na educação básica, que vai dos anos iniciais do ensino fundamental até o ensino médio, e tem suas especificidades e objetos voltados para esse período escolar.

Assim, visualizamos a necessidade de o futuro professor buscar conhecer as várias concepções da Álgebra (BRASIL, 1998) e sua evolução no tempo, entendê-la como um processo histórico e culturalmente construído (ALMEIDA, 2017), que devido às características da sua construção ao longo dos séculos até chegar a forma como a temos hoje, não pode ser ensinada de uma maneira mecânica e sem sentido, demandando, portanto, ser observadas as possibilidades de aproximar a história da Álgebra da prática escolar (COELHO; AGUIAR, 2008), o que relacionamos com o subdomínio KMT (conhecimento do ensino da matemática).

Além disso, D'Ambrósio (2012, p. 27) corrobora nosso entendimento quando considera a história da matemática, e no nosso caso, a história da álgebra, como "elemento fundamental para perceber como teorias e práticas matemáticas foram criadas, desenvolvidas e utilizadas num contexto específico de sua época", bem como que a história vem ganhando importância no ensino como "elemento motivador", que relacionamos com o KMT (ensino), com o KSM (contextos interconceituais) e também com o KFLM (potencialidades de aprendizagem dos alunos).

Nessa mesma perspectiva, Pereira (2022, p. 16) ressalta que um dos enfoques na formação de professores pode ser "as relações entre História da Matemática e a Educação Matemática, que incluem, dentre outras temáticas, formas de lecionar Matemática se utilizando de aspectos da História da Matemática".

Nesse trabalho, Pereira (2022) investigou sete licenciandos de uma universidade Federal em Minas Gerais, e constatou a importância da história da matemática para contribuir com a formação inicial de professores no tocante a mobilizar conhecimentos matemáticos e didáticos, verificando que os futuros professores demonstraram conhecimentos matemáticos para o ensino usando a abordagem histórica em tarefas matemáticas, o que entendemos estar no âmbito do KMT (conhecimento de tarefas e recursos).

Além disso, no trabalho de Lautenschlager e Balvin (2021), os quais focaram o conhecimento das concepções e ensino da álgebra relacionando-os com os subdomínios KoT(conhecimento dos tópicos) e KMT (conhecimento do ensino da matemática), observamos a necessidade de o futuro professor conhecer as concepções da álgebra (BRASIL, 1999), em vista de os autores citados haverem constatado a pouca familiaridade dos licenciandos com as ideias da natureza da álgebra e que ainda permanece a visão de ensino no sentido de aplicação de regras e técnicas.

## 3.2 O conhecimento sobre o Pensamento Algébrico

Devido à ênfase que a BNCC (BRASIL, 2018) dá ao pensamento algébrico, propondo o seu desenvolvimento desde os anos iniciais, entendemos que o futuro professor de matemática também necessita conhecer as características do pensamento algébrico para a sua prática de ensino.

Assim, encontramos que, a partir da década de 1980, dentre as várias discussões sobre o ensino da álgebra escolar, surgiu o tema "pensamento algébrico", que, na perspectiva de

James Kaput, é um modo de pensar evidenciado nas conjecturas e argumentos que resultam em generalizações sobre “dados e relações matemáticas”, os quais vão se solidificando cada vez mais por meio da utilização da linguagem simbólica (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 9).

Nas pesquisas de Almeida e Câmara (2017), Almeida (2016) e Almeida (2018) verificamos uma síntese das várias concepções de pensamento algébrico baseadas nas ideias de Rômulo Lins, James Kaput e Luis Radford, em que caracterizam o pensar algebricamente por meio de cinco manifestações principais, conforme Quadro 2:

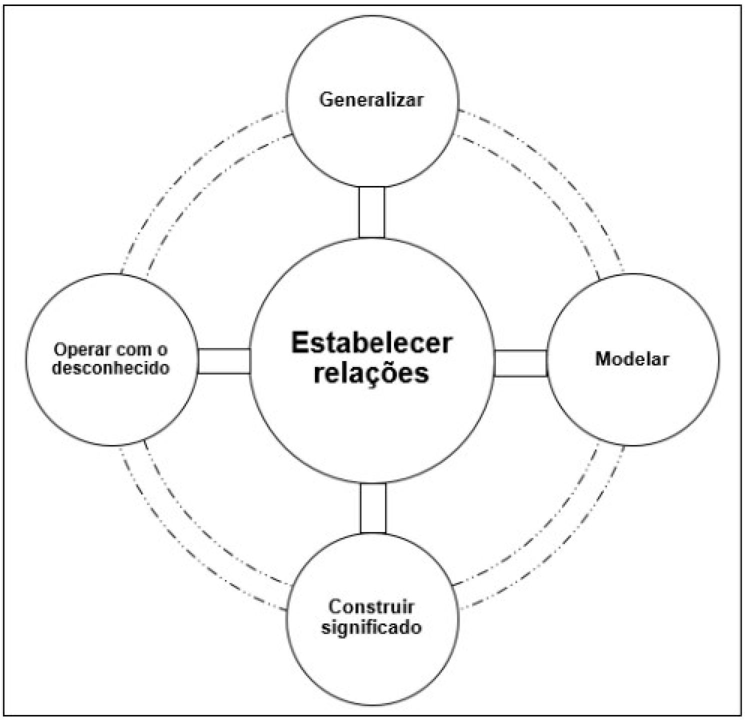
**Quadro 2: Características do Pensamento Algébrico**

| Características | Descrição |
|---|---|
| Estabelecer relações | Quando o aluno consegue estabelecer relações entre os dados e as informações de problemas e expressá-los de forma simplificada. Por exemplo, em problemas de partilha, o estudante consegue estabelecer a relação das partes com o todo; em problemas com equações, consegue ver a igualdade como uma equivalência, ou seja, o aluno observa e usa relações numéricas ou algébricas entre os dois lados do sinal de igualdade. |
| Generalizar | O aluno está pensando algebricamente quando verifica que, de um caso particular, pode estender o raciocínio para casos gerais "em uma linguagem cada vez mais simbólica."<br>Essa generalização pode ser expressa pelos alunos por meio de diferentes linguagens, como a natural, a gestual, a numérica ou a simbólica, cuja linguagem utilizada é determinada pelo nível de experiência que os alunos possuem. |
| Modelar | Quando o aluno utiliza o aspecto sintático da álgebra para representar diversas situações, desde as essencialmente aritméticas, como problemas simples, até as ditas essencialmente algébricas, como as relações funcionais (o que também pode ser expressa nas diferentes linguagens mencionadas no item anterior). |
| Operar com o desconhecido | Quando o aluno lida com quantidades indeterminadas de uma maneira analítica, ou seja, trata quantidades desconhecidas, por exemplo, incógnitas ou variáveis, como se fossem conhecidas, e realiza cálculos com elas como faz na aritmética, com os valores conhecidos. |
| Construir significado | Quando o aluno consegue construir significado para os objetos e para a linguagem algébrica, como, por exemplo, compreender que determinado problema se refere a equações ou a inequações. |

Fonte: Adaptado de Almeida e Câmara (2017), Almeida (2017) e Almeida (2018)

Partilhamos, neste trabalho, da visão desses autores de que a capacidade de estabelecer relações está no centro dessas características, conforme esquema indicado na figura 6, ou seja, “um sujeito só está pensando algebricamente se conseguir estabelecer relações, enquanto as demais vão surgindo com o tempo” (ALMEIDA; CÂMARA, 2017, p. 58).

**Figura 6: Características do pensamento algébrico**




Fonte: Almeida (2016, p. 80)

Além disso, as características do pensamento algébrico esquematizadas por esses autores estão inter-relacionadas e não há ordem entre elas, ou seja, elas estão em comunicação uma com as outras e em desenvolvimento conjuntamente. (ALMEIDA, 2016).

Assim, voltando o nosso foco para a igualdade matemática e suas propriedades, encontramos em Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005, p. 5) o registro de que, dentre vários aspectos, um dos fatores que caracterizam o desenvolvimento do pensamento algébrico em um estudante é quando ele "interpreta uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas".

Esses autores verificaram que as tarefas exploratórias-investigativas têm um grande potencial no desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébrico dos alunos de duas classes do 6º ano do EF em uma escola pública no interior do Estado de São Paulo.

Diante disso, entendemos, que o conhecimento das características do pensamento algébrico (ALMEIDA, 2016), que se manifesta especialmente como "uma forma peculiar de pensar", é assumido como necessário para o ensino e a aprendizagem da Álgebra, e em particular, da igualdade e das suas propriedades.

Almeida, Cabanha e Ribeiro (2017) também reforçam a necessidade de o professor de matemática conhecer as várias facetas que envolvem o pensamento algébrico com o objetivo de promover o desenvolvimento desse tipo de pensar nos alunos:

> Para tanto, torna-se essencial conhecer: uma multiplicidade de questões e dimensões que promovam o desenvolvimento do Pensamento Algébrico e permeiem o trabalho com esse foco, tal como as origens da separação entre Álgebra e Aritmética (História da Matemática); diferentes abordagens para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico nos alunos (História da Educação Matemática); diferentes pesquisas realizadas sobre o tema no âmbito da educação matemática; os documentos curriculares oficiais; e conhecer uma diversidade de possíveis conexões (tanto em forma como em tipo e conteúdo). Estes (e outros) são conhecimentos especificamente associados à atuação do professor (aqui encarada de forma mais ampla que apenas a prática com os alunos), configurando-se, assim, parte do que se considera o conhecimento especializado do professor que ensina matemática.(ALMEIDA; CABANHA;RIBEIRO, 2017).

Esses autores indicam a relevância desse conhecimento especializado a ser buscado pelos professores ou futuros professores que é o conhecimento de como elaborar e implementar tarefas que tenham como foco propiciar o desenvolvimento do pensamento algébrico de seus alunos, o que se encontra no âmbito do subdomínio KMT (conhecimento de tarefas e recursos para o ensino), assim como do KLFM (conhecimento da aprendizagem dos alunos), pois se trata do conhecimento de como se desenvolve o pensamento algébrico nos estudantes.

Litoldo, Ribeiro e Mellone (2018) corroboram esse entendimento quando observam que, na formação de professores de matemática, o conhecimento do professor ou do futuro professor sobre o pensamento algébrico é relevante para o ensino da álgebra, no nível fundamental por ser um tema que recentemente foi incluído pela BNCC nas propostas curriculares.

Esses autores correlacionam o pensamento algébrico com os vários subdomínios do MTSK, indicando os tópicos matemáticos quando é possível desenvolvê-lo, a forma de criação de tarefas e atividades para trabalhar com os alunos e os níveis de pensamento algébrico identificados nas produções dos estudantes, em que compreendemos que tudo isso abarca as especificidades do conhecimento do professor de matemática para o ensino. (LITOLDO; RIBEIRO; MELLONE, 2018).

Também entendemos que há correlação do conhecimento que o professor necessita possuir sobre o pensamento algébrico com o subdomínio KMLS (conhecimento dos padrões de ensino, currículo), pois é um tipo de pensamento enfatizado nos documentos curriculares oficiais (BNCC, PCN), como mencionam Almeida, Cabanha e Ribeiro (2017).

Compreendemos, ao analisarmos o trabalho de Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005), a necessidade de o professor conhecer as vertentes e características do pensamento algébrico (ALMEIDA, 2017) para promover tarefas que promovam o pensamento algébrico nos estudantes, o que se encontra no âmbito do KMT (recursos, tarefas).

## 3.3 O conhecimento sobre os vários significados da igualdade

A igualdade tem vários significados e especificidades que demonstram sua relevância no ensino de conceitos que vão além dos aritméticos e dos algébricos, como explana Miranda (2019).

Por exemplo, a pergunta que inicia a brochura *Enseigner la notion mathématique d'égalité au collège* é bastante desafiadora: " O que poderia ser mais elementar do que a noção de igualdade na matemática?" (IREM, 2017, p. 4, tradução nossa).

Nesse trabalho, verificamos que uma das possíveis fontes de dificuldades na compreensão do sinal de igualdade reside nos variados usos e significados tanto do símbolo como da noção desse objeto matemático.

É uma noção que realmente nos traz inquietações, pois percebemos que, sendo um dos objetos matemáticos mais trabalhados na escola desde os primeiros anos e nos faz indagar: por que causou e ainda causa tanta dificuldade de compreensão, e que, às vezes, é tão óbvio, mas em outro momento, por causa de uma má compreensão, pode induzir a erros ou provocar dificuldades?

Ouvimos constantemente falar das palavras "igualdade" e "igual" no nosso dia a dia, por exemplo, encontramos essas palavras no artigo 5º da nossa Constituição Federal:

> Todos são **iguais** perante a lei, sem distinção de qualquer natureza, garantindo-se aos brasileiros e aos estrangeiros residentes no País a inviolabilidade do direito à vida, à liberdade, à **igualdade**, à segurança e à propriedade..." (BRASIL, 1988, grifo nosso).

Esse símbolo e sua noção estão nos princípios da Revolução Francesa: "Liberdade, Igualdade e Fraternidade"; nas músicas, nas poesias, nos discursos políticos, nas fórmulas da Física e da Química, nas equações da Economia, nas ciências humanas e sociais, em tantos e variados aspectos.

Encontramos também outra significação da relação de igualdade que aparece na Filosofia e é apresentada por John A. Fossa em seu artigo *O Status Epistemológico do Conhecimento Matemático,* em que, na sua incursão sobre a história do pensamento humano, e fazendo uma analogia entre a matemática e a metafísica clássica, apresenta esses dois campos do saber como tentativas de tematizar racionalmente o que nos é dado subjetivamente pela nossa experiência, conclui, portanto, que "[...] a matemática é a tematização do Hum sob **a relação de igualdade**." (FOSSA, 2019, p. 1, grifo nosso).

O "Hum" mencionado refere-se ao conceito de unidade, que aparece na matemática desde os primórdios da história humana nas primeiras ideias de sequência de números naturais e na contagem de figuras similares, e de onde, segundo Fossa (2019), derivam a aritmética, a álgebra, a geometria etc.

Na Matemática, também encontramos uma variedade de contextos da igualdade, como observamos no trabalho de Arias, Mendieta e Dias (2014), os quais elencam várias facetas em que se manifestam a noção de igualdade e o uso do símbolo de igual, a saber: no mundo físico, na geometria Euclidiana e na de Hilbert, na aritmética de Peano, na álgebra clássica, na lógica e na teoria dos conjuntos.

O que podemos perceber, com o exposto, é que a igualdade, por ser uma palavra polissêmica e que, dependendo do uso e dos mais variados contextos, aplicações e sentidos, tanto o símbolo como a noção tornam-se em possíveis obstáculos conceituais para alunos e professores no ensino e na aprendizagem da matemática, mesmo sendo um conceito tão usual na nossa experiência no mundo. (MIRANDA, 2019).

Desse modo, compreendemos ser o conhecimento dos vários significados da igualdade em contextos matemáticos, ou não, um tipo de conhecimento necessário para o futuro professor de matemática ter subsídios para ensinar no nível fundamental temas relacionados com a igualdade e suas propriedades, e que esse conhecimento se encontra no âmbito dos subdomínios: KoT (contextos diversos), conforme indicam Ribeiro, Almeida e Mellone (2021), bem como no KSM (conexões interconceituais), devido à polissemia da noção de igualdade e os vários contextos em que ela se apresenta (ARIAS; MENDIETA; DIAS, 2014), e também no KFLM (obstáculos na aprendizagem dos alunos), conforme ressaltam Miranda (2019) e IREM (2017).

## 3.4 Conhecimento sobre o símbolo de igual em sua evolução na história

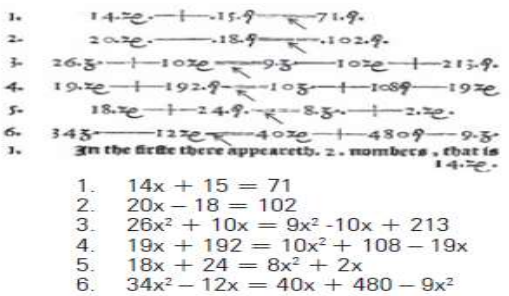
Reiterando o que Almeida (2017, p. 4) discute de que a evolução da álgebra "não aconteceu de um dia para o outro", mas foi o resultado de muito esforço humano durante séculos, percebemos a importância de o futuro professor conhecer a evolução do sinal e da noção de igualdade matemática na história.

Cosme (2007), tendo como objetivos conhecer como evoluiu historicamente o símbolo de igualdade e identificar e caracterizar os conhecimentos e significados revelados por dois professores e quatro turmas de alunos do 6º e 7º anos (antigas 5ª e 6ª série, respectivamente), observou a predominância de os alunos compreenderem o sinal de igual como “resultado”, e que os professores tendem a utilizar o símbolo de igual no ensino como se fosse uma ideia que os alunos já trouxessem naturalmente em si, e que não demandasse atenção.

Assim, com relação ao símbolo igual “=”, no livro considerado como o primeiro tratado de álgebra da língua inglesa, *The Whetstone of Whitte*, publicado em 1557, Robert Recorde utilizou dois seguimentos paralelos de igual comprimento para representar a igualdade, pois, antes dessa representação, ele usava palavras e abreviações, como por exemplo: *aequales, aequantur, aeq*.(ARIAS; MENDIETA; DÍAZ, 2014, p. 24).

Cavalcanti e Santos (2008) nos informam que foram utilizados os mais variados símbolos para a representação do sinal de igualdade até chegar à forma proposta por Robert Recorde (figura 7), e que, por quase um século e meio, houve alternância nas publicações europeias entre o uso do “=” e o símbolo introduzido por René Descartes nos seus trabalhos, a partir de 1637, pelo que, possivelmente, a influência do filósofo, polímata e matemático alemão, Gottfried Leibnz, foi decisiva para a disseminação do uso do sinal de igual tal qual utilizamos atualmente.

**Figura 7: notação do sinal de igual de Record e atual**

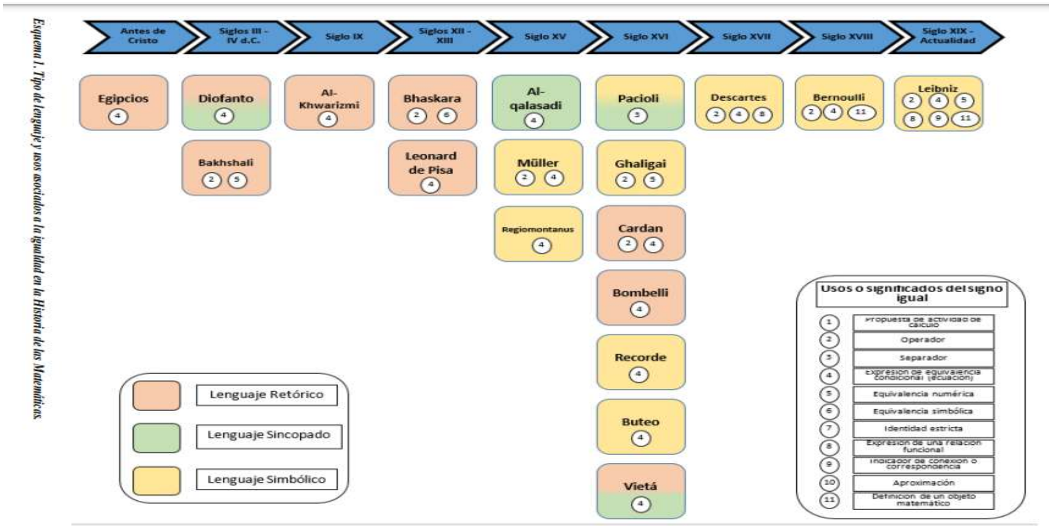



Fonte: Cavalcanti e Santos (2008, p. 34)

Cavalcanti e Santos (2008) e Chaparro (2017) entendem que, assim como a Álgebra é dividida em três estágios pela maioria dos historiadores (retórico, sincopado e simbólico), a representação do sinal de igualdade, seu significado e sua utilização também estiveram atrelados à evolução histórica da Álgebra.

Para uma visão dessas conclusões, reproduzimos o esquema apresentado na pesquisa de Chaparro (2017), conforme figura 8, abaixo, sobre os diversos usos do sinal de igualdade na história da matemática e alguns dos significados classificados na tese de doutorado de Molina (2006), os quais foram utilizados por matemáticos desde os tempos mais remotos até a atualidade.

**Figura 8: Evolução do sinal de igual na história**




Fonte: Chaparro (2017, p. 39)

Observamos no diagrama acima que a equivalência, uma das noções importantes para a resolução de equações, a qual a BNCC enfatiza como uma das habilidades necessárias a ser trabalhada pelos professores com os estudantes do ensino básico, foi utilizada desde os tempos antigos pelos egípcios, adentrando pela Idade Média, até os dias atuais.

De acordo com o esquema da figura 7, Chaparro (2017) indica que o símbolo de igualdade no sentido de equivalência foi utilizado: *i*) com a linguagem retórica, e aparece: na civilização egípcia (a.C.); no século IX, com Al-Khwarizmi; no século XIII, com Leonardo de Pisa; no século XVI, com Cardano e Bombelli; *ii*) com a linguagem sincopada, temos: no século III/IV d.C., Diofanto; no século XV, com Alqualasadi; no século XVI, Pacioli e Viéte; *iii*) com a linguagem simbólica: no século XV, Müller e Regimontanus; no século XVI, Recorde e Buteo; no século XVII, Descartes; no século XVIII, Bernoulli; e no século XIX, temos Leibniz, o qual usava o sinal de igualdade em seis das acepções classificadas por Molina (2006), o que, além disso, remete àquela observação de Cavalcanti e Santos (2008) de que, possivelmente, Leibniz teve um grande peso na propagação do sinal de igualdade na forma como conhecemos hoje.

Diante do exposto, entendemos que o professor ou o futuro professor necessita conhecer a evolução histórica do sinal de igual com a finalidade de entender a importância desse símbolo na construção da álgebra e ter subsídios, por exemplo, para construção de tarefas, atividades ou aulas com teor interdisciplinar (KMT), para introduzir a história da matemática na prática escolar, como sugerem os documentos curriculares oficiais (KMLS), a fim de dirimir os obstáculos conceituais que afetam a compreensão dos alunos (KFLM).

## 3.5 Conhecimento sobre o sentido de símbolo

Sobre a necessidade de o professor conhecer o sentido do símbolo, encontramos que Spielmann (2019, p.7) investigou "os usos, omissões e significados do sinal de igual" nas produções escritas de graduandos em Engenharia Agrícola de uma turma que cursava a disciplina de Cálculo Diferencial I, em uma universidade do Paraná, tendo como resultado que "o símbolo é um item de importância secundária nas resoluções e acreditamos que isso seja resultante de uma vida escolar onde os alunos não tiveram contato com as diversas finalidades e especificidades que o símbolo possui".

Rodrigues (2020), em uma pesquisa que buscou compreender de que forma professores de matemática do ensino básico, agindo colaborativamente em um momento formativo, desenvolveram seus conhecimentos didáticos utilizando as discussões no ensino da álgebra, dentre os vários resultados obtidos, aponta para a relevância dos símbolos no desenvolvimento do pensamento algébrico.

Assim, de acordo com a pesquisa de Fernández e Ochoviet (2015), é de muita importância o professor entender o sentido do símbolo, em vista das dificuldades relatadas nos diversos níveis de ensino, tanto na educação básica como na superior, e muitas vezes também entre licenciandos de matemática e professores experientes, visto que a maioria dos problemas se referem à falta de sentido em que se trabalha a álgebra na escola.

Adotando a perspectiva de Arcavi (1999, 2007), as autoras descrevem que as dificuldades no entendimento do sentido de símbolo ocorrem segundo as características que se manifestam em algumas situações de resolução de tarefas algébricas, em que elas relacionam, conforme segue:

- Facilidade com os símbolos: isso inclui entender os símbolos de forma que eles estejam prontamente disponíveis para serem usados à medida que forem convenientes e para serem colocados de lado quando forem uma opção inadequada;

- Capacidade de manipular e também ler expressões simbólicas: isso inclui a capacidade de adotar uma visão global das expressões simbólicas e, por outro lado, ser capaz de separar os significados para que as manipulações sejam rápidas e eficientes. A leitura de e por meio de expressões simbólicas com o objetivo de apreender significados adiciona níveis de conexão e razoabilidade aos resultados;

- Conscientizar-se de que é possível projetar com sucesso relações simbólicas que expressem certas informações dadas ou desejadas;

- Ser capaz de reconhecer em expressões simbólicas equivalentes, significados não equivalentes: a manipulação simbólica de expressões algébricas permite-nos obter expressões equivalentes, mas cada expressão com que nos deparamos pode ser fonte de novos significados;
- A capacidade de selecionar uma representação simbólica e, em certos casos, de reconhecer nossa própria insatisfação com essa escolha e descobrir como encontrar uma melhor;
- Realizar manipulações simbólicas orientadas por um objetivo desejado, evitando realizar operações circulares, e tendo uma visão global em que os símbolos são organizados de uma determinada forma, e não apenas como uma concatenação de letras;
- Conscientização da necessidade de revisar os significados dos símbolos durante a aplicação de um procedimento, durante a resolução de um problema ou durante a inspeção de um resultado, e de comparar esses significados com as intuições sobre os resultados esperados e com a própria situação problemática;
- Conscientizar-se de que os símbolos podem desempenhar diferentes papéis em diferentes contextos e desenvolver um senso intuitivo dessas diferenças.

Entendemos, com isso, a relevância de o futuro professor de matemática conhecer o sentido de símbolo, com as características descritas acima, principalmente, quando estiverem em situações de prática escolar no trato com tarefas algébricas, conforme a visão de Fernández e Ochoviet (2015).

Entendemos, portanto, que esse tipo de conhecimento possui foco nos subdomínios: KoT (procedimentos, registros de representação), KSM (conexões com conteúdos passados e futuros), KPM (formas de validar, demonstrar), KMT (tarefas, recursos) e o KFLM (obstáculos, dificuldades dos alunos).

## 3.6 Conhecimento do contexto de utilização do símbolo de igualdade

Molina (2006, p. 148) distinguiu treze significados apresentados pelo sinal de igualdade no contexto aritmético e no algébrico que relacionamos como de fundamental importância para o conhecimento do professor, a fim de, em situações de prática, trazer sentido às tarefas e às atividades para o ensino da igualdade e das suas propriedades especificadamente no 6º ano do EF, a saber:

*i*) proposta de atividade: expressões apenas em um membro, constando o sinal de igualdade à direita, indicando uma solicitação de resposta do aluno;

*ii*) operador: expressões com dois membros, contudo, o segundo membro é a resposta;

*iii*) expressão de uma ação: relaciona-se com as várias operações que se pode fazer entre os membros da igualdade;

*iv*) separador: significado indicado pelo estudante para separar os procedimentos;

*v*) expressão de uma equivalência condicional: a expressão contém uma incógnita, um valor desconhecido, que apenas possui um resultado;

*vi*) expressão de uma equivalência numérica: significado em expressões aritméticas em que o igual representa o mesmo valor numérico em cada lado (depois de realizar as operações, ou porque o igual mostra duas maneiras de escrever o mesmo número);

*vii*) expressão de uma equivalência simbólica: expressões algébricas em que para qualquer valor que a variável assuma, o mesmo valor numérico é obtido de cada lado;

*viii*) identidade estrita: quando o mesmo número exato ou desconhecido é representado em cada lado da igualdade;

*ix*) por definição ou notação, definição de um objeto matemático: define um objeto matemático;

*x*) expressão de uma relação funcional ou de dependência: utilizado em expressões que representam dependência entre as variáveis;

*xi*) indicador de certa conexão ou correspondência: objetos matemáticos e não matemáticos são usados. Associações de palavras (linguagem normal) com números ou expressões numéricas;

*xii*) aproximação: o sinal de igual é usado para relacionar uma expressão com sua respectiva aproximação numérica;

*xiii*) atribuição de um valor numérico: é atribuído um valor numérico à variável.

No Quadro3, esses significados do sinal de igual, nos contextos mencionados, são exemplificados.

**Quadro 3: Símbolo de igualdade no contexto aritmético e no algébrico**

| Significados do sinal de igual | Exemplos | |
|---|---|---|
| | Aritméticos | Algébricos |

<table>
<tr><td colspan="2">Proposta de atividade</td><td>16:3 =</td><td>x (x + 1) - 3x (x + 5) =</td></tr>
<tr><td colspan="2">Operador</td><td>4 x 5 =20</td><td>$x(x-2) + 3x^2 = 4x^2 + 2x$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Expressão de uma ação</td><td>24 = 12 + 12</td><td>$f(x) = x^2 \Rightarrow f^2(x) = x^4$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Separador</td><td>Não se aplica</td><td>$2x = x(x-2) - x^2 + 4x = 2x$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Expressão de uma equivalência condicional</td><td>Não se aplica</td><td>$x^2 + 4x = 5x - 6$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Expressão de uma equivalência</td><td>Numérica</td><td>4 + 5 = 3 + 6<br>$2\sqrt{3} = \sqrt{12}$<br>2/3 = 4/6</td><td>Não se aplica</td></tr>
<tr><td>Simbólica</td><td>Não se aplica</td><td>$x^2 + 2x = x(x-2)$</td></tr>
<tr><td>Identidade estrita</td><td>3 = 3</td><td>x = x</td></tr>
<tr><td>Por definição ou notação</td><td>3/4 = 6/8</td><td>a/b = ab^-1</td></tr>
<tr><td colspan="2">Definição de um objeto matemático</td><td>1 ° = 1</td><td>$a^o = 1, a \neq 0$<br>r = ax + by + c = 0<br>f(x) = 3x + 2<br>c = a + b (definidos a e b se introduz o valor de uma nova variável)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Expressão de uma relação funcional ou de dependência</td><td>Não se aplica</td><td>$C = 2\pi r$<br>Y = 3x + 2 (quando a variável "y" tem sido definida a priori)</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Indicador de certa conexão ou correspondência</td><td>Preço de uma bicicleta = R$700,00</td><td>Uma bicicleta = 3x + 5</td></tr>
<tr><td colspan="2"> = 3</td></tr>
<tr><td colspan="2">Aproximação</td><td>1/3 = 0,33</td><td>Não se aplica</td></tr>
<tr><td colspan="2">Atribuição de um valor numérico</td><td>Não se aplica</td><td>x = 4<br>$a = 30\ cm^2$</td></tr>
</table>

Fonte: Molina (2006, p. 153)

Portanto, de acordo com Molina (2006), o símbolo de igualdade possui vários significados dentro dos contextos aritméticos e algébricos e, em face das considerações de Azevedo (2017) e as de Silva e Ribeiro (2014) quanto às dificuldades na transição (passagem da aritmética para a álgebra formal) dos estudantes do 5º ano para o 6º ano do EF, entendemos a necessidade de o futuro professor conhecer os vários significados do símbolo de igualdade “=” nos contextos apresentados no Quadro 3, a fim de evitar interpretações ambíguas e equívocos dos estudantes na resolução de tarefas e atividades.

Esse tipo de conhecimento, no nosso entender, tem um foco mais voltado para os subdomínios: KoT (conhecimento do contexto matemático), KSM (conexões com conteúdos passados e futuros), KMT (tarefas e recursos) e KFLM (dificuldades dos alunos).

## 3.7 O conhecimento sobre as propriedades da igualdade

Verificamos na pesquisa de Kieran (1981) que um dos possíveis obstáculos da não compreensão dos alunos na passagem da aritmética para a álgebra simbólica reside no fato de que os estudantes, inicialmente, entenderem o sinal de igual como algo que dará um resultado, ou seja, é apenas um "lugar" para se colocar a resposta, enquanto que, ao passarem à aprendizagem das equações, por exemplo, há necessidade de que eles entendam o sentido de equivalência que está ínsito nas propriedades da igualdade.

Spielmann (2019) e Teles (2002) também reforçam as constatações acima, indicando que, deixar de entender os significados do sinal de igual ou usar de forma inadequada as propriedades da igualdade, pode acarretar dificuldades na compreensão matemática, as quais provocam futuros problemas conceituais.

Na literatura pesquisada, notamos que os autores variam na forma como descreverem ou representam as propriedades da igualdade.

Por exemplo, Teles (2002, p. 52) relaciona dois princípios de equivalência, a saber: *i*) Princípio Aditivo da Igualdade: adicionando ou subtraindo um mesmo número nos dois membros de uma igualdade obtém-se outra sentença que ainda é uma igualdade; *ii*) Princípio Multiplicativo da Igualdade: multiplicando, ou dividindo, os dois membros de uma igualdade por um mesmo número (diferente de zero), obtém-se uma nova sentença que ainda é uma igualdade.

Ponte, Branco e Matos (2009, p. 19) citam três propriedades da igualdade:

*i*) reflexiva: (se a = b então b = a , para quaisquer elementos a e b);

*ii*) simétrica: ( a = a, para todo o elemento a);

*iii*) transitiva: (se a = b e b = c , então a = c para quaisquer elementos a, b e c).

Oliveira e Fernández (2010, p. 34-35) citam duas propriedades da igualdade para iniciar o estudo das equações do primeiro grau, em consonância com Teles (2002), conforme segue:

Propriedade 1:

Se dois números são iguais, ao adicionarmos a mesma quantidade a cada um destes números, eles ainda permanecem iguais. Em outras palavras, escrevendo em termos de letras, se a e b são dois números iguais, então a + c é igual a b + c, ou seja,

$$a = b \rightarrow a + c = b + c$$

Propriedade 2:

Se dois números são iguais, ao multiplicarmos a mesma quantidade a cada um destes números, eles ainda permanecem iguais. Em outras palavras, escrevendo em termos de letras, se a e b são dois números iguais, então a . c é igual a b. c, ou seja,

$$a = b \rightarrow a \, . \, c = b \, . \, c$$

Lessa (2005, p. 18) aponta que "...este princípio é o que permite se passar de uma equação para outra dita equivalente, se tal passagem decorrer da realização de uma mesma operação em ambos os membros da referida equação".

No Quadro 4, compilamos as propriedades da igualdade que encontramos na literatura pesquisada.

**Quadro 4: Propriedades da igualdade matemática**

| Propriedade | Descrição | Exemplo |
|---|---|---|
| Reflexiva | Se um número é igual a outro, esse outro é igual ao primeiro. | se a = b então b = a , para quaisquer elementos a e b. |
| Simétrica | Um número é sempre igual a ele mesmo. | a = a, para todo o elemento. |
| Transitiva | Se um número é igual a outro e esse outro é igual a um terceiro, o primeiro é igual ao terceiro. | se a = b e b = c, então a = c para quaisquer elementos a, b e c. |
| Princípio Aditivo | Se dois números são iguais, ao adicionarmos ou diminuirmos a mesma quantidade a cada um destes números, eles ainda permanecem iguais. | $a = b \rightarrow a + c = b + c$<br>$a = b \rightarrow a - c = b - c$ |
| Princípio multiplicativo | Se dois números são iguais, ao multiplicarmos ou dividirmos (exceto pelo zero, no caso da divisão) a mesma quantidade a cada um destes números, eles ainda permanecem iguais. | $a = b \rightarrow a \, . \, c = b \, . \, c$<br>$a = b \rightarrow a/c = b/c \; (c \neq 0)$ |

Fonte: baseado em Teles (2002), Ponte, Branco e Matos (2009) e Oliveira e Fernández (2010)

Verificamos, portanto, a necessidade de o futuro professor conhecer as propriedades da igualdade de uma forma mais ampla como a exposta no Quadro 4 acima, tendo em vista que a BNCC indica, para o desenvolvimento das habilidades nos alunos do 6º ano do EF, apenas o ensino do princípio aditivo e do multiplicativo (BRASIL, 2018).

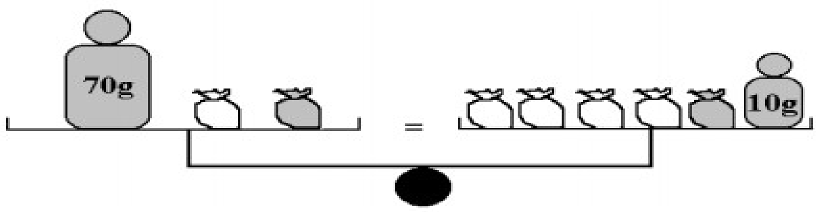
Esse tipo de conhecimento para o ensino no 6º ano do EF, em nosso entender, tem foco direcionado a todos os subdomínios: KoT (conhecimento das propriedades); KSM (conhecimento de conexões entre conteúdos passados e futuros); KPM (conhecimento da prática matemática), e, aqui, lembramos da explicação de Cabanha (2018), ao indicar que o professor também precisa conhecer o porquê da utilização de procedimentos, conceitos, propriedades etc., por exemplo, com relação ao princípio multiplicativo acima descrito, o professor necessita saber demonstrar a impossibilidade da divisão pelo zero; KMT (conhecimento de tarefas e recursos, ajudas, atividades); KFLM (conhecimento das dificuldades dos alunos) e KMLS (conhecimento do que prescreve os documentos oficiais curriculares sobre o tema).

### 3.8 Conhecimento de tarefas e recursos para o ensino das propriedades da igualdade

O conhecimento de tarefas e recursos pelos docentes e futuros docentes para o ensino da álgebra é bastante relevante a fim de que, em situações de prática, seus alunos se apropriem de conceitos como a equivalência e o equilíbrio, que são necessários para a compreensão das propriedades da igualdade (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009; BANDARRA 2011).

Assim, encontramos pesquisas que reforçam essa ideia com relação ao uso de tarefas e recursos para o ensino, como, por exemplo, o trabalho de Lessa (2005), que ressalta a importância do significado da equivalência para apropriação de conceitos algébricos, no qual foi aplicada uma sequência didática com 14 alunos na faixa etária entre 12 e 13 anos, que cursavam o 7º ano (6ª série antiga) do EF, sendo utilizada a metáfora da balança (figura 9), indicando ser esse tipo de representação recorrente nos livros didáticos para despertar nos estudantes a noção de equivalência e de equilíbrio, tendo como resultado que as tarefas, que fizeram parte da sequência didática aplicada, atenderam aos propósitos delineados naquela pesquisa.

**Figura 9: Representação da equivalência como uma balança**



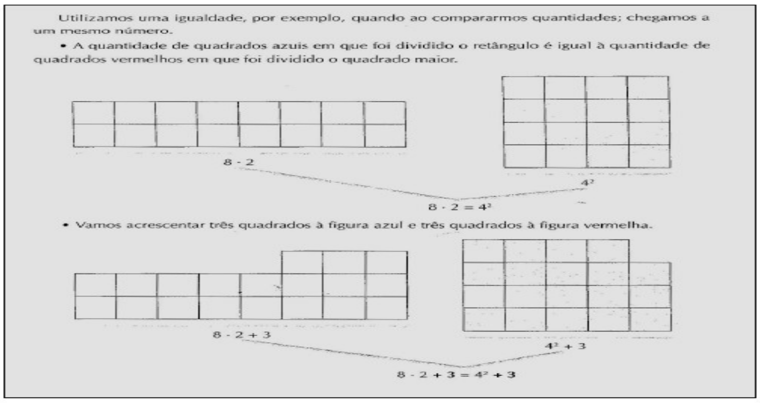

Fonte: Lessa (2005, p. 19)

Lessa (2005) também indica que o princípio de equivalência entre as equações é um dos obstáculos epistemológicos que podem afetar a compreensão dos estudantes no tocante à álgebra, e a balança de dois pratos é um objeto cultural que possui potencial didático para auxiliar na construção do conhecimento algébrico.

Azevedo (2021, p. 14) reforça que a balança de dois pratos, mesmo sendo um objeto que não tem mais o uso que teve no passado, pois foi substituído por balanças digitais, ainda é uma metáfora eficaz para dar sentido à noção de igualdade, de forma que a analogia que se faz entre a equação do primeiro grau com a balança é para buscar descobrir a massa de um objeto (valor desconhecido) comparando um lado com o outro.

Outros autores, tais quais Silva e Costa (2014), por meio de tarefas, representam as propriedades da igualdade usando os quadriculados da figura 10 para comparar quantidades, que seria outro registro de representação, porém, a maioria dos livros didáticos se valem da balança para explanar esse tipo de conceito, conforme exemplifica Teles (2002).

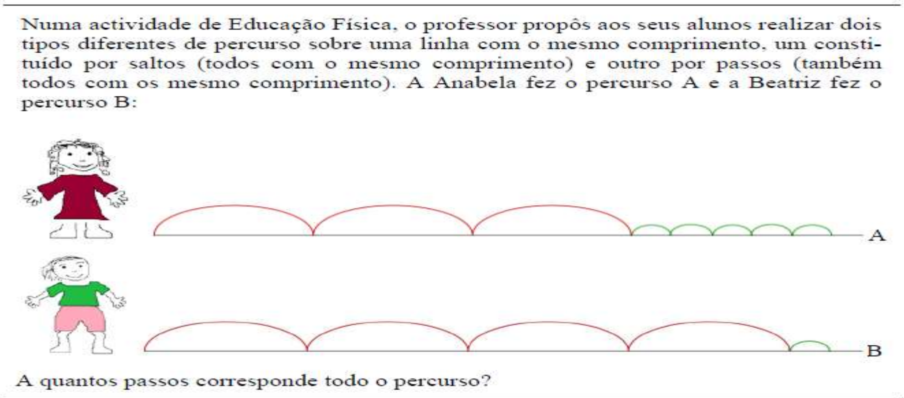
**Figura 10: Atividades com a igualdade**




Fonte: Silva e Costa (2014, p. 33)

Encontramos ainda em Ponte, Branco e Matos (2009, p. 37) que a equivalência pode ser trabalhada em atividades com a reta não graduada, como o exemplo da figura 11, o qual permite introduzir problemas que trazem o significado de equivalente para o sinal de igualdade, trabalhar com valores desconhecidos e com a noção de equivalência entre expressões:

**Figura 11: Atividade para o ensino da equivalência**



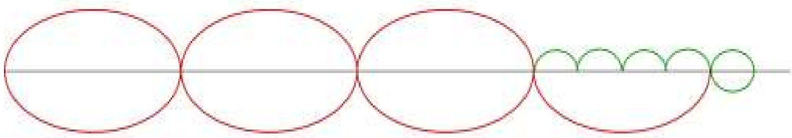

**Fonte: Branco, Ponte e Matos (2009, p. 37)**

Os autores explicam essa atividade indicando que

> Parte do percurso em A e em B é igual. Ambos iniciam com três saltos, pelo que este início do percurso, numa primeira fase, não nos dá muita informação. A parte final de ambos os percursos dá-nos mais informação. Comparando os dois casos, verificamos que um salto e um passo equivalem a cinco passos, donde se conclui que um salto equivale a quatro passos. Com esta informação podemos já indicar que cada percurso corresponde a dezessete passos no total. (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p.38).

É também ressaltado (p. 38) por esses autores que o professor "pode pedir aos alunos que marquem ambos os percursos numa reta só, de modo a facilitar o estabelecimento de relações entre eles", conforme é apresentado na figura 12:

**Figura 12: Ambos os percursos na mesma reta**



Fonte: Ponte, Branco e Matos (2009, p. 38)

O que pode ser passado para a linguagem algébrica como: $3x + 5 = 4x + 1$, ou adaptando para o 6º ano do EF: $3 \square + 5 = 4 \square + 1$.

Notamos, portanto, que a noção de equivalência é uma das mais importantes e que uma das metáforas trabalhadas pela maioria dos autores, usadas para ajudar na compreensão do conceito de equivalência, é a noção de equilíbrio.

Como exemplo, Berricha e Saraiva (2009) aplicaram tarefas em uma turma do 7º ano do EF, com 16 alunos, para expandir os significados do sinal de igualdade em um trabalho prévio com igualdades numéricas verdadeiras, tanto na perspectiva de provocar nos alunos o sentido relacional entre as expressões numéricas, como pensando que, o ato de comparar igualdades, traz o sentido de equilíbrio numérico, a fim de que os alunos visualizassem, no futuro, essa noção de equivalência quando se deparassem com as equações literais (as que usam letras como incógnita).

Outro exemplo encontramos em Bandarra (2011), que aplicou testes com alunos do 2º, 5° e 8º anos do ensino básico, obtendo como resultados: a) os alunos de diferentes ciclos encaram o sinal de igualdade de forma distinta (p. 320); b) o desenvolvimento do pensamento relacional inicia-se com a compreensão do sinal de igual e edifica-se quando os alunos conjecturam, generalizam e justificam (p. 308); c) em todo o ensino básico, devem ser concretizadas situações que permitam analisar os diferentes significados do sinal de igual e desenvolver o pensamento relacional, pois destes dependem a compreensão dos conceitos aritméticos e algébricos (p.321), o que corrobora a perspectiva de Almeida e Santos (2017) quando indicam ser a noção relacional primordial para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

A pesquisa de Cruz (2016) também tratou do significado da noção de equivalência da igualdade e sua relação com o desenvolvimento do pensamento algébrico por meio de testes com alunos do 7º ano do EF, os quais indicaram a importância da comunicação e das interações na sala de aula como meios de atingir um ensino significativo da álgebra.

Com relação a recursos digitais, observamos que a cada dia, devido a sociedade atual estar mergulhada em apetrechos virtuais, há necessidade de o professor também conhecer as tecnologias digitais/virtuais usadas no ensino, pelo que encontramos no trabalho de Oliveira, Almeida e Espíndola (2021) a identificação de vários tipos de tarefas que são úteis para ajudar os alunos a compreenderem as relações de igualdade e os princípios de equivalência fazendo uso do recurso digital que simula uma balança de dois pratos disponível na plataforma *Physics Education Technology – PhET Interactive Simulations*.

Nesse caminho, entendemos a importância de não restringir a noção de igualdade por meio de atividades que apenas enfatizem práticas mecânicas aritméticas ou algébricas, como por exemplo, as simplificações e transformações de expressões, tendo em vista os vários significados e contextos que o sinal de igualdade abarca (WILHELMI; GODINO; LACASTA).

Pelo exposto, compreendemos a necessidade de o professor ou o futuro professor buscar conhecimento sobre tipos de tarefas, recursos físicos e virtuais, e atividades que desenvolvam o conceito de equivalência e equilíbrio para o ensino das propriedades da igualdade, o que entendemos que esse conhecimento está no âmbito do subdomínio KMT (ensino, tarefas, recursos), mas também se encontra no subdomínio KFLM (potencialidades, erros, obstáculos dos alunos), pois ao escolher tarefas ou recursos para o ensino, o professor necessita estar ciente das características de aprendizagem dos estudantes.

## 3.9 Conhecimento sobre os parâmetros de aprendizagem da Matemática

O conhecimento dos parâmetros de aprendizagem da Matemática não se refere apenas ao conhecimento dos documentos curriculares, contudo, compreendemos que o conhecimento dos padrões e níveis de ensino tratados na BNCC são necessários para que o futuro professor se inteire das habilidades que os estudantes precisam desenvolver para entender determinado conteúdo dentro do seu nível escolar.

A Base Nacional Comum Curricular é um documento que estabelece normas e critérios curriculares os quais preconizam competências e habilidades para os alunos do ensino básico a ser almejadas de forma progressiva, a fim de que os estudantes tenham "seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE)" (BRASIL, 2018, p. 7).

A BNCC estava prevista no artigo 26 da Lei nº 9.394/96 (Lei Diretrizes e Bases da Educação Brasileira - LDB), com redação alterada pela Lei nº 12.796/13, que, dentre outras medidas, dispõe sobre a necessidade de se estabelecer um currículo com base comum para a Educação Básica (Ensinos Infantil, Fundamental e Médio), como complementam Triches e Aranda (2016, p. 84),

> "[...] a BNCC é considerada uma exigência do sistema educacional brasileiro pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (BRASIL, 1996), pelas Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica (BRASIL, 2009) e pelo Plano Nacional de Educação (BRASIL, 2014) ".

As recomendações indicadas pela BNCC, conforme Franco e Munford (2018, p. 159), trata-se de inúmeras orientações sobre o que seria indispensável na educação de crianças e de adolescentes para a reformulação dos currículos das escolas públicas e privadas brasileiras.

De acordo com os mesmos autores, em 2014, o PNE estabeleceu 20 metas, sendo 4 relacionadas à BNCC; em 2015, foi elaborada a primeira versão; de 2015 a 2016, houve consultas públicas até ser delineada a terceira versão. Apenas em 2018, foram homologadas as versões da Educação Infantil, do Ensino Fundamental, e, por fim, a do Ensino Médio.

Na área da Matemática, foco da nossa pesquisa, a BNCC propõe que no EF espera-se que os alunos utilizem aquilo que aprenderam de "conceitos, procedimentos e resultados" para, além de chegar à resolução dos problemas, também os interpretem dentro do contexto analisado (BRASIL, 2018).

Além disso, com relação ao Ensino Fundamental, temos que a BNCC ressalta que o ensino deve ter "compromisso com o letramento matemático", o que, segundo Brasil (2018, p. 266), trata-se da capacidade que cada indivíduo possui em "formular, empregar e interpretar a matemática em uma variedade de contextos", necessitando, para isso, ser desenvolvidas nos alunos competências e habilidades específicas.

Com relação às habilidades esperadas no Ensino Fundamental, a BNCC divide a área de Matemática em cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e edidas e Probabilidade e Estatística, em que resumimos as habilidades propostas em cada unidade, conforme segue (BRASIL, 2018, p. 268-274):

*i*) Números: nessa unidade, os alunos devem desenvolver o pensamento numérico, as ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, dentro de situações que envolvam tarefas nos campos dos números naturais e racionais para os anos iniciais, e com os números naturais, inteiros, racionais e reais, para a outra etapa do ensino fundamental. Nos anos finais, também são abordados assuntos sobre porcentagem, juros, descontos, conceitos básicos de economia e finanças, inclusive em inter-relação com os conteúdos das demais unidades temáticas;

*ii*) Álgebra: na unidade temática álgebra, a finalidade é o desenvolvimento do pensamento algébrico, em que é necessário que os estudantes identifiquem padrões, sequências, façam generalizações, interpretem diversas representações gráficas e simbólicas, tendo como fundamento as ideias de equivalência, variação, interdependência de grandezas e proporcionalidade. Sendo que nos anos iniciais não é proposto o uso de letras, mas, sim, a aprendizagem voltada para as ideias de regularidade, de generalização de padrões e das propriedades da igualdade, enquanto, nos anos finais, é dada ênfase às significações das variáveis nas expressões e entre grandezas, ao valor desconhecido em uma sentença algébrica, à conexão entre variável e função, e entre incógnita e equação, ressaltando-se que esses elementos são imprescindíveis para resolução de problemas;

*iii*) Geometria: nessa unidade é instigado o estudo da posição e deslocamento no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais, as propriedades dos entes geométricos, as transformações, simetrias, dentre outros aspectos. Inclusive, há uma aproximação entre a álgebra e a geometria quando da introdução do plano cartesiano;

*iv*) Grandezas e Medidas: nessa unidade estuda-se as medidas e as relações métricas entre elas, o que faz integrar a Matemática com outras áreas do conhecimento. É uma unidade que fortalece as noções numéricas, geométricas e algébricas, sendo estimulada a resolução de problemas cotidianos que envolvam grandezas físicas sem uso de fórmulas, situações de compra e venda, dentre outras. Nos anos finais, é esperado que os alunos identifiquem as relações entre grandezas geométricas e as não geométricas (densidade, energia, potência etc.);

*v*) Probabilidade e Estatística: são propostas, nessa unidade, "habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados" contextualmente, a fim de a análise resultar em julgamentos bem estruturados, em predição de fenômenos, em que são utilizadas tecnologias, como por exemplo, calculadoras, planilhas eletrônicas. São trabalhadas as noções de aleatoriedade e de probabilidade, dentre outras.

Na nossa pesquisa, tratamos apenas da unidade temática álgebra, que, diferentemente dos programas curriculares anteriores, é nela enfatizado o ensino da álgebra mais cedo, ainda que também tenhamos observado no "Blocos de conteúdos Números e Operações" dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) haver menção sobre a possibilidade de ser desenvolvida uma "pré-álgebra" nos anos iniciais, contudo, apenas com o advento da BNCC é que a álgebra passa a ser uma unidade com os conteúdos mais específicos e com o desenvolvimento do pensamento algébrico como uma das principais metas a ser buscadas. (BRASIL, 1998, p.39; BRASIL, 2018).

Tendo em vista que o objeto matemático tratado na nossa investigação é a igualdade matemática e suas propriedades, verificamos que a BNCC estruturou, no campo temático da Álgebra, o desenvolvimento gradual de habilidades esperadas para compreensão da ideia de igualdade do 3º até o 7º ano do Ensino Fundamental, os quais são os parâmetros propostos pelo documento oficial para a aprendizagem dos alunos relacionados a esse conteúdo, o que também entendemos ser um conhecimento necessário para o professor desenvolver para o ensino.

Embora a igualdade seja trabalhada desde os dois primeiros anos do EF na área temática Números, apenas a partir do 3º ano é que as habilidades se tornam mais delineadas e direcionadas para a área da Álgebra, conforme Quadro 5 (BRASIL, 2018).

**Quadro 5: As propriedades da igualdade na BNCC**

| Ano | Objeto de conhecimento | Habilidades | Conteúdos | Códigos |
|---|---|---|---|---|
| 3º | Relação de igualdade | Compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de | Relação de igualdade em sentença de adição e subtração: | EF03MA11 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | adições ou subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença | dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença. | |
| 4º | Propriedades da igualdade | Reconhecer e mostrar, por meio de exemplos, que uma igualdade não se altera quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a seus dois termos.<br><br>Determinar o número desconhecido que torna verdadeira uma igualdade que envolve as operações fundamentais com números naturais. | Propriedades de igualdade: Relação de igualdade na adição e subtração.<br><br>Operações fundamentais com números naturais: determinação de número desconhecido que torna uma igualdade verdadeira. | EF04MA14<br><br>EF04MA15 |
| 5º | Propriedades da igualdade e noção de equivalência | Concluir, por meio de investigações, que uma igualdade não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir seus dois membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência.<br><br>Resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido. | Propriedades da igualdade.<br>Noção de equivalência.<br><br>Operações (+, –, x, :) com Números Naturais e Racionais (situações problemas): leitura, interpretação, formulação e solução por meio de algoritmos, cálculo mental, uso da calculadora e verificação dos resultados. | EF05MA10<br><br>EF05MA11 |
| 6º | Propriedades da igualdade | Reconhecer que uma igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas. | Propriedades da igualdade | EF06MA13 |
| 7º | Equações polinomiais do 1º grau | Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade. | Equações polinomiais redutíveis à forma $ax + b = c$, resolução fazendo uso das propriedades da igualdade | EF07MA14 |

Fonte: Adaptado de Brasil (2018)

Observamos, portanto, que as propriedades da igualdade têm lugar de destaque na BNCC, na unidade temática Álgebra, desde os anos iniciais, dando-se ênfase à relação de equivalência:

> A relação de equivalência pode ter seu início com atividades simples, envolvendo a igualdade, como reconhecer que se 2 + 3 = 5 e 5 = 4 + 1, então 2 + 3 = 4 + 1. Atividades como essa contribuem para a compreensão de que o sinal de igualdade não é apenas a indicação de uma operação a ser feita. (BRASIL, 2018, p.270).

Para elaboração do instrumento para a construção dos dados, o que será visto mais adiante, observamos a habilidade nº EF06MA14, para o 6º ano, a qual é dividida em duas partes (BRASIL, 2018, p. 303):

a) que seja trabalhada com o aluno a habilidade de reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número, ou seja, que o estudante seja capaz de reconhecer a noção de equivalência nas expressões com igualdades;

b) deve-se utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas.

Essa habilidade é a base para o uso das letras no ano escolar posterior, quando for apresentado o conteúdo referente às equações polinomiais de 1º grau (PINHEIRO, 2019; BRASIL, 2018).

Notamos, entretanto, que, embora o símbolo de igual, a noção e as propriedades da igualdade sejam trabalhados em vários contextos e significados após o 7º ano, esse objeto matemático não é mais falado pela BNCC como habilidades para os outros dois anos do EF (8º e 9º anos), inclusive, não há mais menção explícita desse objeto matemático no programa do Ensino Médio, o que acreditamos ser uma lacuna, dado que, de acordo com o que observamos na literatura que consultamos, os significados e usos do sinal de igualdade e suas propriedades continuam a ser trabalhados em toda educação básica nos mais variados significados e contextos e em todos os níveis de ensino, inclusive no nível superior (SPIELMANN, 2019).

Esse tipo de conhecimento tem foco no subdomínio KMLS (conhecimento dos padrões e níveis de ensino), conforme observamos nos estudos de Montes, Contreras e Carrillo (2013), em que esses autores ressaltam que o professor de matemática precisa conhecer o currículo institucional para saber o que é proposto aos níveis de ensino e o que se espera da aprendizagem dos alunos em cada etapa.

Esses autores reforçam que o subdomínio KMLS tem uma amplitude maior que o conhecimento do currículo advindo dos documentos oficiais, mas são incluídas as contribuições de documentos internacionais, de pesquisas em educação matemática e de instituições e associações profissionais. (MONTES; CONTRERAS; CARRILLO, 2013).

Dessa forma, como síntese deste capítulo, percebemos a importância de se conhecer os vários significados da igualdade matemática e das suas propriedades e a necessidade de trabalhar esses conceitos com os estudantes, a fim de que o professor de matemática da educação básica venha propor tarefas e atividades que proporcionem o desenvolvimento do sentido de símbolo e da noção de equivalência.

Relembramos que, na nossa pesquisa, a igualdade matemática é assumida nos contextos aritméticos e algébricos e no desenvolvimento do pensamento algébrico, de acordo com as propostas da BNCC, a qual dá ênfase à noção de equivalência, tendo em vista que analisamos conhecimentos matemáticos e didáticos de futuros professores de matemática para o ensino no 6º ano do Ensino Fundamental, sendo esse nível de ensino pautado em conteúdos matemáticos que se encontram entre a aritmética e a álgebra formal.

Com essas considerações, ressaltamos a importância de que na formação do futuro professor de matemática serem promovidas oportunidades de aprendizagem com discussões e reflexões sobre esse objeto matemático que: evoluiu com a própria história da álgebra; faz parte da característica do pensamento algébrico; há um alto grau de polissemia; provoca dificuldade de interpretação em todos os níveis de ensino, inclusive entre docentes; possui propriedades fundamentais para construção de vários conceitos matemáticos em vários contextos, logo a necessidade de se conhecer tarefas específicas para o desenvolvimento desses conceitos, além da ênfase que lhe é dada pelo documento oficial (BNCC).

Obviamente, não pretendemos esgotar esse assunto, pois há muito mais conhecimentos profissionais docentes que são necessários para o futuro professor desenvolver para o ensino das propriedades da igualdade, porém, de acordo com a limitação dos nossos objetivos, elencamos esses conhecimentos que encontramos na literatura consultada e suas relações com os subdomínios do MTSK.

Abaixo, indicamos no Quadro 6 os conhecimentos que entendemos necessários para o professor ou o futuro professor desenvolver para o ensino das propriedades da igualdade no 6º ano do Ensino Fundamental e a correspondência com os focos dos subdomínios do MTSK que encontramos nas pesquisas e documentos oficiais consultados.

**Quadro 6: Conhecimentos necessários para o ensino das propriedades da igualdade e MTSK**

| Conhecimentos necessários sobre... | Foco dos subdomínios encontrado nas pesquisas consultadas |
|---|---|
| ... a álgebra: sua evolução histórica e concepções. | KoT/ KSM/ KMT/ KFLM/ KMLS |
| ... o pensamento algébrico. | KoT/ KMT/ KFLM/ KMLS |
| ... os vários significados da igualdade. | Todos os subdomínios |
| ... o símbolo de igual em sua evolução na história. | KMT/ KFLM/ KMLS |
| ... o sentido de símbolo. | KoT/ KSM/ KPM/ KMT/ KFLM |
| ... o contexto de utilização do símbolo de igualdade. | KoT/ KSM/ KMT |
| ... as propriedades da igualdade. | Todos os subdomínios |
| ... tarefas e recursos para o ensino. | KoT/ KMT/ KFLM |
| ... os parâmetros de aprendizagem da Matemática. | KMLS |

Fonte: autor

No próximo capítulo, passaremos a descrever, o percurso metodológico da nossa pesquisa.

# 4. PERCURSO METODOLÓGICO

Neste capítulo, apresentamos a caracterização da nossa pesquisa, o contexto e os sujeitos, as opções metodológicas e os instrumentos utilizados para produção e análise dos dados, além de descrever como os dados foram organizados e tratados.

## 4.1 Abordagem da pesquisa

Segundo as ideias de D'Ambrosio (2012, p.73), a pesquisa é "o que permite a interface interativa entre a teoria e a prática", e a prática se constitui como elemento de modificação da teoria inicial e essa daquela, ou seja, não há desvinculação dessas dimensões, uma vai modificando a outra no processo.

Esse autor nos alerta que a pesquisa em educação necessita destacar a complexidade do indivíduo no contexto natural, cultural e social, sendo essa umas das características principais da pesquisa qualitativa.

Nossa pesquisa se enquadra, portanto, na abordagem qualitativa e interpretativa na perspectiva de Bogdan e Biklen (1994), os quais conceituam que esse tipo de investigação tem o ambiente natural como "fonte direta dos dados"; o investigador é o instrumento principal; há mais interesse no processo do que pelos resultados; os dados são analisados "de forma indutiva" e o significado é primordial nessa abordagem, assim também como indica Oliveira (2011, p. 29), porque buscamos uma análise descritiva do objeto de estudo, com a "delimitação de lugar, tempo, revisão de literatura e coleta de dados".

A metodologia da nossa pesquisa também foi arquitetada nos moldes de uma pesquisa de intervenção (AGUIAR *et al.*, 2021; BARBOZA, 2019), conforme ações pormenorizadas nos tópicos a seguir, e pela própria natureza de intervenção do processo formativo em que são aplicadas Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP) (BALL; COHEN, 1999; RIBEIRO; PONTE, 2020; BARBOZA, 2019), as quais serão utilizadas como instrumento de produção de dados, bem como promotoras de Oportunidades de Aprendizagem Profissional (OAP), de acordo com o que já mencionamos no referencial teórico (RIBEIRO; PONTE, 2020).

## 4.2 Os sujeitos e o contexto da pesquisa

Na fase exploratória da nossa pesquisa, relacionada com a aplicação do questionário, os sujeitos foram 19 licenciandos, todos cursando a disciplina de Estágio Supervisionado Obrigatório III (ESO III) do curso de graduação em Licenciatura em Matemática de uma universidade pública situada no Estado de Pernambuco.

O Estágio Supervisionado Obrigatório (ESO), de acordo com Barbosa e Lopes (2021, p. 64), "é um componente curricular obrigatório nos projetos pedagógicos dos cursos de formação inicial de professores".

O ESO se caracteriza como um período de aprendizagem profissional, em que o licenciando adquire "conhecimentos acerca da realidade escolar e de aspectos associados à profissão docente"; é supervisionado por um professor da educação básica, ligado a uma instituição de ensino; configura-se em um espaço formativo que oportuniza e "pode se constituir em um espaço privilegiado de formação do futuro professor", ao oportunizar a articulação entre a teoria e a prática (BARBOSA; LOPES, 2021, p. 64).

A escolha dos sujeitos no período mencionado foi devido aos licenciandos estarem em contato com a prática na sala de aula, por meio do estágio profissional, o que contempla nosso objetivo de pesquisa tanto na dimensão do conhecimento matemático como no didático.

Os sujeitos do processo formativo foram seis licenciandos, sendo uma licencianda (LC4) e cinco licenciandos, todos estagiando em turmas do nível fundamental, anos finais, cujos nomes foram omitidos, passando a ser indicados doravante por LC e o número correspondente.

Também participou da formação o professor da disciplina, o qual possui doutorado na área de educação e mais de dez anos de experiência docente.

## 4.3 Sobre a ética na pesquisa

Tendo em vista que a nossa investigação envolve seres humanos, procuramos seguir as recomendações de Fiorentini e Lorenzato (2009, p. 194) da exigência de que o investigador deve ter "um compromisso com a verdade e um profundo respeito aos sujeitos que nele confiam".

Dessa forma, os dados apresentados serão relacionados preservando-se a identidade dos sujeitos envolvidos e da instituição de ensino, observando: *i*) os direitos dos entrevistados, o respeito e o bem-estar dos participantes; *ii*) a preservação da identidade das pessoas envolvidas;

*iii*) o uso das informações e citações de outros autores; *iv*) a fidedignidade das informações; v) as implicações sociais e políticas da pesquisa. (FIORENTINI; LORENZATO, 2009, p. 196).

### 4.4 Percurso metodológico

O percurso metodológico para produção e análise dos dados ocorreu nesta sequência:

a) contato com o professor da disciplina ESO III;

b) construção do questionário prévio;

c) aplicação do questionário, quando os licenciandos foram inteirados sobre o objetivo da pesquisa e responderam às questões;

d) análise do questionário para observar aqueles itens em que havia necessidade de intervenção quando da construção da TAP;

e) construção da TAP com o professor formador;

f) aplicação da TAP, com a execução do processo formativo orquestrado pelo modelo PLOT, mediada pelo professor formador;

g) discussão coletiva das tarefas (última fase do modelo PLOT);

h) descrição, organização e categorização dos dados;

i) resultados, análise e discussão dos dados.

Nos próximos tópicos, detalharemos os instrumentos usados para produção dos dados.

#### 4.4.1 Sobre os instrumentos para a produção dos dados

Como mencionando anteriormente, para a produção dos dados, utilizamos dois instrumentos nesta sequência:

*i*) um questionário inicial para sondagem dos conhecimentos prévios dos licenciandos sobre alguns aspectos relevantes da matemática, da álgebra, dentre outros, a fim de trazer mais subsídios na construção da TAP;

*ii*) um processo formativo mediado por uma Tarefa de Aprendizagem Profissional (TAP), conforme será detalhado no subtópico específico.

### 4.4.2 Questionário prévio

O questionário é um instrumento para obtenção de dados formado por "um conjunto de questões que são respondidas por escrito pelo pesquisado" e é bastante útil para verificação de diversos tipos de informação relacionadas com a pesquisa (GIL, 2002, p. 114).

Portanto, com a finalidade de trazer mais embasamento para o desenvolvimento da nossa investigação, aplicamos um questionário inicial, a fim de termos um panorama dos conhecimentos que os licenciandos tinham sobre: os documentos curriculares oficiais, a álgebra, o significado e propriedades da igualdade matemática, a área da matemática que entendem mais difícil, com o intuito de construir os itens da TAP aplicada no momento de formação.

Para a produção dos dados do questionário, participaram 19 discentes do curso de licenciatura de um universidade pública do estado de Pernambuco, sendo 8 do turno da tarde e 11 do turno da noite, dentre os quais 8 licenciandas e 11 licenciandos.

Os licenciandos que participaram do questionário foram identificados com o código LCT1, sendo LC = licenciando; T = turno que frequenta na graduação, e o número que identificamos o discente.

Ressaltamos que, dos dezenove licenciandos que estiveram presentes na aplicação do questionário inicial, apenas três participaram também do momento formativo em que foi aplicada a TAP, de forma que, como não houve intenção de comparar os dois momentos formativos, a identificação (numeração) dos três participantes de ambos os instrumentos não coincide.

Assim, o questionário (ver apêndice) foi aplicado de forma física, tendo em vista a volta às aulas presenciais, e constou de doze questões abertas que, na visão de Razo (2011), corroborando a perspectiva de Gil (2002), são questões em que o sujeito pesquisado tem a liberdade de expressar seu julgamento ou opinião sobre determinado assunto.

As questões 1, 2 e 3 foram elaboradas com foco nos documentos oficiais curriculares e foram aplicadas no intuito de serem verificados os conhecimentos dos licenciandos em relação ao subdomínio KMLS (conhecimento de níveis e de padrões de ensino), o qual trata dos temas e padrões de ensino relacionados a cada nível escolar e do currículo, tendo a questão 1 também abordado o subdomínio KFLM (conhecimento sobre as características de aprendizagem dos alunos).

As questões 4, 5 e 6 contemplam os subdomínio KMT (conhecimento do ensino da matemática), KSM (conhecimento de conexões entre conteúdos passados e futuros) e KFLM (conhecimento sobre as características de aprendizagem dos alunos), e foram construídas para serem verificados os conhecimentos dos licenciandos sobre o ensino da álgebra, a relação da álgebra com outras áreas do conhecimento e com conteúdos interconceituais, e sobre o que entendiam acerca do baixo rendimento dos alunos nessa área da matemática.

As questões 7 a 12 remetem aos subdomínios: KoT, arquitetadas para verificação dos conhecimentos dos licenciandos relativos ao conteúdo relacionado ao significado da igualdade matemática e das suas propriedades e os contextos em que o sinal de igualdade apresenta em sentenças matemáticas; KSM (conexões entre conteúdos matemáticos); KPM (formas de justificar e validar conteúdos matemáticos); importância do símbolo para a aprendizagem dos alunos (KFLM) e a forma como os licenciandos apresentariam esse conteúdo aos estudantes, que se encontra no âmbito do subdomínio KMT (conhecimento do ensino da matemática) e também no conhecimento do conteúdo matemático (KoT).

### 4.4.3 O processo formativo

O pesquisador e o professor formador, por meio de encontros via *Google Meet* e por *e-mail*, construíram a TAP, acertando os detalhes e fazendo os ajustes necessários durante o mês de fevereiro e março de 2022.

A princípio, havia três tipos de tarefas candidatas à TAP que seria aplicada, mas resolvemos escolher apenas uma com vários itens que contemplassem aqueles conteúdos e subdomínios do MTSK, os quais verificamos ser mais necessários e urgentes ser explorados embasados nos resultados descritos no questionário inicial.

Conforme explicaremos quando detalharmos os resultados do questionário, em vista de alguns resultados apontarem para a necessidade de serem promovidas oportunidades de aprendizagem aos futuros professores sobre os conhecimentos matemáticos e didáticos no âmbito das propriedades da igualdade, escolhemos uma tarefa matemática que utilizava a metáfora da balança, para, intencionalmente, provocar reflexões aos futuros professores, e também por ser uma tarefa muito utilizada na literatura consultada, como, por exemplo, na pesquisa de Teles (2002), e por fazer analogia com o conceito de equivalência e com a ideia de equilíbrio (LESSA, 2005), o que se coaduna com as habilidades requeridas para os estudantes compreenderem as propriedades da igualdade preconizadas na BNCC (BRASIL, 2018), e, consequentemente, com o que se espera que o futuro professor conheça e ensine sobre esse conteúdo.

Na construção da TAP, balizados no trabalho de Ferreira, Ribeiro e Ribeiro (2017, p. 504), incluímos a solicitação de justificativas em cada item da tarefa, a fim de “compreender a manifestação deste conhecimento” do futuro professor com relação àqueles tópicos.

Sendo assim, no mês de abril de 2022, submetemos, informalmente, um rascunho da TAP para análise e sugestões de alguns colegas professores e de doutorandos do Professor Dr. Alessandro Ribeiro, que trouxeram contribuições valiosas para o desenho final da tarefa.

Relembramos que a TAP foi construída, intencionalmente, com duplo objetivo, a saber, promover oportunidades de aprendizagem profissional (RIBEIRO; PONTE, 2020) aos futuros professores de matemática e obter dados provenientes das produções escritas e orais dos licenciandos para servir de análise, comparando-os com os subdomínios do MTSK (CARRILLO *et al*., 2014).

O processo formativo foi negociado com o professor da disciplina de ESO III para ser executado em dois encontros: o primeiro para a aplicação do questionário e o segundo para a aplicação da TAP baseada nas ações previstas no modelo PLOT (RIBEIRO; PONTE, 2020).

### 4.4.4 A Tarefa de Aprendizagem Profissional (TAP)

A TAP foi elaborada em duas partes, conforme apêndice, sendo a primeira constante de uma tarefa matemática (TM) com tema para alunos do nível do 6º ano do Ensino Fundamental, a qual foi escolhida com base na literatura utilizada na pesquisa, focando, principalmente, no conteúdo das propriedades da igualdade; e, a segunda parte, figurando questões referentes ao conhecimento matemático e didático esperado do futuro professor para o ensino do objeto matemático mencionado.

### 4.4.5. Justificativa para os itens da TAP

No Quadro 7, constam as questões da TAP, iniciando-se com a Tarefa Matemática (TM) na coluna da esquerda. Na coluna da direita, encontram-se os subdomínios relacionados com o item da TAP, ou seja, daquilo que se esperava que o licenciando viesse a evidenciar conforme a tipologia apresentada no MTSK.

**Quadro 7: Justificativa para os itens da TAP**

| Itens | O que se esperava do licenciando/grupo e a relação com os subdomínios do MTSK: |
|---|---|
| PRIMEIRA PARTE:<br>TAREFA MATEMÁTICA (TM) | Resolver a tarefa matemática, utilizando as propriedades da igualdade, justificar, |

| | |
|---|---|
| Resolva a questão, encontrando o peso do pote, justificando de que forma você chegou ao resultado. | identificar termos matemáticos, conceitos, definições, propriedades, técnicas etc. (KoT).<br>Justificar procedimentos, validar, demonstrar (KPM).<br>Esse item foi pensado para ser resolvido individualmente e para ser discutida sua resolução entre os componentes do grupo na segunda parte da TAP. |
| <u>SEGUNDA PARTE:</u><br><br>Quatro alunos resolveram a questão assim:<br><br>Um aluno respondeu que cada pote de doce tem 2 kg.<br><br>Outro falou que, se retirar um peso de 3 kg do prato da direita, a balança permanecerá em equilíbrio.<br><br>O terceiro afirmou que, se a comerciante tirar o peso de 2 kg do prato da direita e 2 kg do da esquerda, a balança volta a ficar em equilíbrio.<br><br>O quarto disse que, se a comerciante retirar um peso de 2 kg do prato da direita e um pote de doce da esquerda, a balança volta a ficar em equilíbrio.<br><br>a) Você concorda com as respostas dos quatro alunos acima? Justifique. | Reconhecer os erros cometidos por três alunos, tentar compreender e justificá-los (KFLM); identificar, por exemplo, que três estudantes não aplicaram as propriedades da igualdade corretamente (KoT/KFLM); identificar as relações entre os dois membros da igualdade, fazendo analogia com o conceito de equilíbrio da balança (KoT).<br>Da mesma forma com relação ao terceiro estudante, por exemplo, qual estratégia ele usou para resolver a questão (KoT/KMT/KFLM).<br>Justificar procedimentos, validar, demonstrar (KPM). |
| b) Em qual ano escolar essa questão poderia ser aplicada? Por quê? | Identificar: o nível ou níveis de ensino que a TM poderia ser aplicada; a qual conteúdo a TM se relaciona no currículo oficial; se há sequenciamento de conteúdo antes ou depois do nível de ensino identificado (KMLS);<br>Estabelecer conexões com os conteúdos passados e futuros (KSM). |
| c) Você faria alguma adaptação nessa atividade? Qual? Por quê? | Identificar outras atividades que poderiam derivar da TM, com ou sem uso de recursos digitais ou físicos, correlações com a história da matemática, com tarefas para o desenvolvimento do pensamento algébrico etc. (KMT);<br>Estabelecer conexões com os conteúdos passados e futuros (KSM).<br>Justificar procedimentos, validar, demonstrar (KPM). |
| d) Que recursos (físicos ou digitais) você usaria para ensinar essa tarefa aos alunos no ensino fundamental? Justifique. | Identificar/conhecer recursos (físicos ou digitais) para o ensino do conteúdo (KMT). |
| e) Quais conceitos você identificou que a tarefa aborda? | Identificar, fazer analogias, encontrar conexões entre a tarefa e uma equação, no caso, verificar que se trata de achar uma incógnita, um termo desconhecido, o conceito de equivalência, de equilíbrio, sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico etc. (KoT/KSM/KMT). |
| f) Indique uma tarefa que você trabalharia com os alunos após executar a tarefa da balança. | Identificar que a tarefa, por exemplo, se aplicada ao 6º ano do EF, trata-se de uma preparação para o estudo futuro das equações |

| | |
|---|---|
| | polinomiais do 1º grau. (KoT/KSM/KMT/KMLS). |

Fonte: autor baseado no referencial teórico

### 4.4.6 Passos utilizados para execução do processo formativo

Utilizando o esquema apresentado por Ribeiro e Ponte (2020, p. 6) com relação às características, componentes e dimensões do modelo PLOT, a formação foi elaborada observando-se os seguintes parâmetros:

a) Papel do formador: o professor da disciplina foi o formador e também teve o papel de construtor da TAP com a colaboração do pesquisador, além de orquestrar as IDP na plenária;
b) Tarefa de Aprendizagem Profissional (TAP) e Interações Discursivas entre os Participantes (IDP): no momento de formação, a TAP foi aplicada e foram oportunizadas as potenciais discussões em grupo (2ª parte da TAP), bem como, na plenária, com as seguintes etapas:

- 1ª etapa: distribuição da tarefa matemática (TM) para resolução individualmente:

a) foi distribuída a tarefa matemática (1ª parte da TAP) para que cada licenciando resolvesse a questão individualmente, tendo sido aguardado 20 minutos.

b) quando todos devolveram a folha com a resposta, passamos ao segundo estágio.

- 2ª etapa: formação dos grupos e distribuição da 2ª parte da tarefa:

Após os dois grupos serem formados espontaneamente, com três discentes cada, foi apresentada a 2ª parte da tarefa (TAP), e os licenciandos dispuseram de 45/50 minutos para responder os itens propostos. Nesse momento, foram gravadas as discussões dos grupos em áudio. Também foi requerido que os grupos escrevessem uma síntese da conclusão a que chegaram com relação a cada item da TAP.

- 3ª etapa: formação da plenária

Os grupos, nessa fase, leram a síntese a que chegaram e discutiram sobre os itens da TAP, expondo sobre os temas propostos guiados pelas perguntas levantadas pelo formador (professor da disciplina). A discussão que ocorreu na plenária também foi gravada em áudio.

Resumimos, portanto, os procedimentos metodológicos, conforme Quadro 8, e suas relações com nossos objetivos específicos e com os principais autores em que fundamentamos nossa investigação:

**Quadro 8: Objetivos, procedimentos metodológicos e principal referencial teórico**

| Questões norteadoras | Objetivos específicos | Instrumento de produção de dados | Principais autores para fundamentação |
|---|---|---|---|
| Que conhecimentos prévios os futuros professores trazem para a formação inicial sobre a matemática, sobre a álgebra, sobre a igualdade e suas propriedades, e sobre os documentos curriculares oficiais? | Identificar os conhecimentos prévios dos futuros professores sobre a matemática, sobre a álgebra, sobre a igualdade e suas propriedades, e sobre os documentos curriculares oficiais. | Questionário aberto. | Questionário com elementos do MTSK (Carrillo et al. 2014); da literatura consultada na pesquisa (os vários autores apresentados no texto); e da BNCC (Brasil, 2018). |
| Quais conhecimentos profissionais são evidenciados por futuros professores de matemática sobre o conteúdo e o ensino do conteúdo das propriedades da igualdade para o 6º ano do Ensino Fundamental? | Descrever o conhecimento profissional dos futuros professores de matemática sobre a igualdade e suas propriedades com relação ao conhecimento matemático e didático do conteúdo. | Aplicação de uma Tarefa de Aprendizagem Profissional (TAP). | Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP): Ribeiro e Ponte (2020); Ball e Cohen (1999), com elementos do MTSK (Carrillo et al.,2014) e da BNCC (Brasil, 2018). |
| De que maneira um processo formativo mediada por uma Tarefa de Aprendizagem | Orquestrar um processo formativo, mediado por uma Tarefa de Aprendizagem Profissional, no sentido de | Processo formativo desenhado na perspectiva do modelo PLOT. | Modelo PLOT (Oportunidades de Aprendizagem Profissional) na |

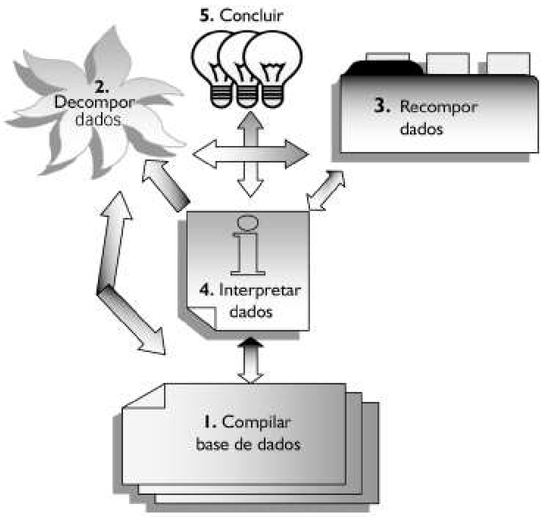
| | | | |
|---|---|---|---|
| Profissional promove o desenvolvimento profissional de futuros professores de matemática? | oportunizar aprendizagem profissional aos futuros professores. | | perspectiva de Ribeiro e Ponte (2020). |

Fonte: autor

## 4.5 Configuração da análise dos dados

Para organizar, categorizar e analisar os dados adaptamos as cinco fases de análise de abordagem qualitativa e interpretativa indicadas por Yin (2016), conforme figura 13.

**Figura 13: Passos da análise**




Fonte: Yin (2016, p. 349)

Seguimos, assim, as fases:

- Fase 1. Compilação da base de dados:

Yin (2016, p. 350) indica que compilar significa colocar os dados numa certa ordem, e que a base de dados da pesquisa surge nessa fase.

Portanto, nessa primeira fase, procedemos à transcrição dos três áudios advindos das interações discursivas dos dois grupos (G1 e G2) e da plenária (PL), organizamos as falas dos participantes do processo formativo em três quadros nos moldes da figura 14, com a identificação de cada fala do participante por linha.

Para identificação e apresentação da análise, as falas dos licenciandos nas discussões nos grupos e na plenária foram codificadas constando o momento das reuniões dos grupos e da plenária, seguindo das linhas em que consta o excerto que queremos apresentar, por exemplo:

Excerto G1[1-10]: discussão no grupo 1, falas nas linhas de 1 a 10;
Excerto G2[5-13]: discussão no grupo 2, falas nas linhas de 5 a 13;
Excerto PL[2-8]: momento da plenária, falas nas linhas de 2 a 8.

**Figura 14: Exemplo do quadro utilizado para organizar os dados**

| Ordem da fala no áudio | Sujeito/fala do sujeito | Categoria dos subdomínios do MTSK evidenciadas | Comentário: "o licenciando demonstrou conhecimento sobre..." |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |

Fonte: autor.

- Fase 2: Decomposição dos dados:

De acordo com o esquema de análise de Yin (2016), a segunda fase

> exige decompor os dados compilados em fragmentos ou elementos menores, o que pode ser considerado um procedimento de decomposição. O procedimento pode (mas não precisa) ser acompanhado por uma atribuição de novos rótulos, ou "códigos", aos fragmentos ou elementos. O procedimento de decomposição pode ser repetido muitas vezes como parte de um processo de tentativa e erro de testar códigos, o que explica a seta bidirecional entre essas duas primeiras fases (YIN, 2016, p. 350).

Portanto, nessa segunda fase, ajustamos as falas dos participantes, seguindo o procedimentos descritos por Cotrim (2022), cuja pesquisa também utilizou a perspectiva de organização e análise de dados de Yin (2016), decompondo os dados de forma que foram eliminadas das falas as gírias, vícios de linguagem, ajustadas concordâncias verbais e nominais, e, após, incluídas as falas nas linhas na ordem descrita na fase 1.

- Fase 3: Recomposição de dados:

Nessa fase, fizemos comparações sistemáticas (MORIEL JUNIOR; CARRILLO, 2014) para identificar o conhecimento especializado dos futuros professores de matemática utilizando o MTSK (CARRILLO *et al.*, 2014), adaptado para o MTSK das propriedades da igualdade, e, assim, selecionar os episódios em que detectamos os indícios de conhecimentos profissionais dos futuros professores de matemática.

- Fase 4: Interpretação dos dados:

Os dados foram interpretados à luz dos subdomínios do MTSK e da literatura consultada no referencial teórico, conforme quadro 10 da categorização dos conhecimentos especializados do futuro professor de matemática para o ensino das propriedades da igualdade, que detalharemos no tópico devido.

- Fase 5: Conclusão:

Nessa fase, “[...] Tais conclusões devem estar relacionadas à interpretação na quarta fase e, por meio dela, a todas as outras fases do ciclo” (YIN, 2016, p. 352), pelo que foram feitas conclusões da análise dessa forma, as quais também serão pormenorizadas no tópico específico.

### 4.5.1 Códigos e categorização dos dados utilizados na análise

Nessa secção, descrevemos os códigos e a categorização dos dados utilizados para análise do questionário e da TAP.

#### 4.5.1.1 Códigos utilizados na análise do questionário

Participaram do questionário 19 discentes do curso de licenciatura de uma universidade pública do estado de Pernambuco, sendo 8 do turno da tarde e 11 do turno da noite, dentre os quais 8 licenciandas e 11 licenciandos.

Todos concordaram em participar do questionário, após ter sido solicitado pelo professor da disciplina ESO III, havendo sido explicado que não seriam identificados pelos nomes reais, mas, no caso da nossa pesquisa, por números.

Como foi antes mencionado, para identificar os licenciandos (LCs) no questionário utilizamos o código LCT1 (LC= licenciando; T = turno que frequenta na graduação, seguido do número que identificamos o discente).

Os resultados colhidos do questionário foram organizados em um quadro no moldes da figura 15.

**Figura 15: exemplo do quadro elaborado para análise do questionário**

Resultados do questionário

Questão 1: Em qual nível de ensino da educação básica você considera haver mais dificuldade em álgebra? Por quê?

LC= licenciando; T = turno da tarde; N = turno da noite.

| Sujeitos | Resposta dos licenciandos | Comentários/observações/nível de ensino indicado | Principal dificuldade/causa indicada |
|---|---|---|---|

Fonte: autor

Apresentamos também, no Quadro 9, os códigos que utilizamos para facilitar a leitura da análise do momento formativo.

**Quadro 9: Códigos utilizados na análise**

| Descrição | Códigos |
|---|---|
| Licenciandos | LC1, LC2, LC3, LC4, LC5, LC6. |
| Tarefa Matemática | TM |
| Professor formador | PF |
| Grupo 1 | G1: participantes LC1, LC2 e LC3 |
| Grupo 2 | G2: participantes LC4, LC5 e LC6 |
| IDP | Interações discursivas |
| Plenária | PL |

Fonte: autor

### 4.5.1.2 Categorização dos dados

A categorização dos dados teve como base a classificação indicada nos subdomínios do MTSK, na perspectiva de Carrillo et al.(2014), comparando com o que encontramos na literatura consultada, conforme foi explanado no capítulo 3, sobre o tema das propriedades da igualdade e com o que a BNCC propõe como objetivo para desenvolver habilidades nos alunos, ou seja, classificamos aqueles conhecimentos especializados necessários para o conteúdo e o ensino do conteúdo em questão.

Para facilitar a análise, codificamos, portanto, com base no referencial teórico, os conhecimentos que compreendemos ser necessários para o futuro professor de matemática ter, aprender ou desenvolver para o ensino das propriedades da igualdade no 6º ano do Ensino Fundamental, conforme Quadro 10.

**Quadro 10: Categorias do MTSK das propriedades da igualdade**

| Conhecimentos necessários para o ensino das propriedades da igualdade | Categoria do subdomínio do MTSK relacionada | Código |
|---|---|---|
| O que é uma relação de igualdade;<br>Que a igualdade é uma relação de equivalência;<br>A noção de equilíbrio e a analogia com a propriedade de equivalência.<br>Que o conceito de igualdade e das propriedades da igualdade foi construído historicamente;<br>As propriedades da igualdade, inclusive, as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva;<br>Termos matemáticos que envolvem as propriedades da igualdade como: incógnita, termo desconhecido, membros da igualdade, equivalência. | KoT – definições, propriedades e seus fundamentos. | KoT1 |
| Os registros de representações (utiliza a linguagem natural, a numérica, ou a algébrica etc. para resolver problemas que envolvam as propriedades da igualdade). | KoT – registros de representações. | KoT2 |
| Procedimentos, técnicas, algoritmos para determinar uma incógnita (um termo desconhecido). | KoT – procedimentos. | KoT3 |
| Variados contextos em que se pode aplicar o conteúdo da igualdade e suas propriedades. | KoT – fenomenologia. | KoT4 |
| Estabelecer conexões com conteúdos passados e futuros envolvendo a igualdade e suas propriedades. | KSM – conexões com outros conteúdos matemáticos. | KSM |
| Formas de validação, demonstrações, justificações de procedimentos, conceitos etc. | KPM – formas de validar, de justificar, de demonstrar na matemática. | KPM |
| Identificar e tentar compreender os erros, as dificuldades e os obstáculos conceituais dos alunos. | KFLM – erros, dificuldades, obstáculos. | KFLM |

| | | |
|---|---|---|
| Recursos físicos e digitais que possam ser utilizados para o ensino desse conteúdo. | KMT – recursos materiais e virtuais. | KMT1 |
| Tipos de problemas que se relacionem com o conteúdo das propriedades da igualdade;<br>Que a metáfora da balança tem potencialidade para explicar aos alunos as propriedades da igualdade. | KMT – atividades, exemplos, tarefas e ajudas. | KMT2 |
| Conteúdos matemáticos que são requeridos para ensinar as propriedades da igualdade.<br>Níveis de desenvolvimento conceitual e procedimental esperado dos alunos. | KMLS – conteúdos relacionados aos níveis e padrões de ensino. | KMLS |

Fonte: autor.

## 4. 6 Os dados produzidos no processo formativo

Os dados produzidos no processo formativo originaram-se dos protocolos gerados pela resolução individual da tarefa matemática (1º item da TAP), pela resolução em grupo dos demais itens da TAP, bem como pelos áudios transcritos resultantes das interações e das discussões dos licenciandos nos momentos das reuniões dos grupos e da plenária.

Procedemos a análise por meio de "comparações sistemáticas com as definições dos subdomínios do MTSK", nos moldes utilizados por Moriel Junior e Carrillo (2014), ou seja, após a transcrição dos áudios das discussões dos grupos G1, G2 e da plenária (fase 1 de compilação de Yin, 2016), foram inseridos nos quadros respectivos a cada episódio os indícios das categorias do MTSK relacionados às propriedades da igualdade indicadas no Quadro 10.

A análise passou a ser feita, posteriormente, observando cada item da TAP, a começar pela Tarefa Matemática.

No próximo capítulo, trataremos dos resultados, da análise e da discussão dos dados produzidos no questionário e no processo formativo.

# 5. RSULTADOS, ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Neste capítulo, tratamos dos resultados, da análise e da discussão dos dados, começando com os dados produzidos no questionário e, após, os dados do momento formativo.

## 5.1 Resultados e análise dos dados advindos do questionário

Lembramos que o questionário foi aplicado para termos uma visão do conhecimento prévio dos licenciandos e para que fornecesse subsídios para a construção da TAP, conforme nosso primeiro objetivo específico, pelo que foram gerados os seguintes resultados e observações inseridas no Quadro 11:

**Quadro 11: Resultados do questionário**

| Questões | Resultados/observações |
|---|---|
| 1º - Em qual nível de ensino da educação básica você considera haver mais dificuldade em álgebra? Por quê? | 2 licenciandos responderam que consideravam os anos finais o nível de escolaridade com mais dificuldades com a álgebra; 13 LCs responderam que eram os anos finais (sendo o 7º ano visto como o mais problemático); 2 LCs responderam que era o EM; e 2 não especificaram o nível de ensino.<br>A maioria aponta como possíveis causas das dificuldades: a passagem da aritmética para a álgebra formal, falta de interpretação de texto, medo de assunto novo (equação) e dificuldades com as operações básicas. |
| 2º - Você conhece o que diz a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) com relação à área temática álgebra? Se positivo, o quê? | 9 licenciandos responderam que não tinham contato com os documentos oficiais, apenas 2 deles disseram que conheciam, mas não detalharam; 8 responderam que conheciam alguma coisa, e citaram a palavra "habilidades", mencionaram alguns conteúdos e termos matemáticos relacionados à álgebra. |
| 3º - Você conhece o que diz os PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais sobre a álgebra? Se positivo, o quê? | 2 dos licenciandos responderam que não lembravam, 1 disse que conhecia, mas não especificou e 16 responderam que não conheciam. |
| 4º - Para o ensino e a aprendizagem da álgebra o que você considera mais importante? Por quê? | 4 dos licenciandos responderam que consideravam mais importante no ensino da álgebra os assuntos de álgebra, mas não especificaram que assuntos; 5 disseram que era o ensino por resolução de problemas; 3 disseram que era a abstração; os outros 7 restantes responderam de forma diversificada: interpretação;  pensamento algébrico, desenvolver habilidades para transformar expressões, usar lógica, trabalhar com o contexto dos alunos; ter boa base de conhecimentos aritméticos. |

| | |
|---|---|
| 5º - Com relação à álgebra ensinada na escola, você verifica conexões entre os conteúdos ensinados com as outras áreas da matemática? Por quê? | 5 dos licenciandos responderam que verificavam conexões com várias áreas, mas não especificaram; 1 não respondeu; 13 responderam várias áreas: como "todas dos anos finais", "equação", "estatística", "conteúdo de sequências e funções", "geometria – exercícios com resolução de problemas". As respostas foram bem diversificadas e alguns citaram mais de uma área. |
| 6º - Qual ou quais motivos você considera que mais contribui para o baixo rendimento de estudantes com relação à álgebra? Por quê? | 3 licenciandos indicaram como causa a aula expositiva; 5 LCS responderam que era o início de cálculos usando letras misturadas aos números (álgebra formal); nas respostas dos outros 11 LCs, não encontramos uniformidade, várias foram os motivos que os licenciandos indicaram como possíveis causas do baixo rendimento dos estudantes com relação à álgebra, como por exemplo: "preconceito com a matemática, por considerar difícil", "uma única forma de avaliação", "dificuldade de trabalhar com abstração"; "maneira de o professor abordar o assunto". |
| 7º - O que você entende por igualdade? | 10 LCs responderam que entendem a igualdade como "equivalência"; 4 responderam "duas coisas iguais"; 1 respondeu "equilíbrio"; 1 expressou como "uma relação binária"; 1 LC falou "mesma expressão numérica"; 1 LC respondeu: "fazer comparações", e 1 LC: "balanceamento entre expressões". |
| 8º - Nesta expressão: $2+8=4+6$, o que significa o sinal de igual "="? | Os licenciandos justificaram que entendiam o sinal de igual na expressão numérica como a "soma de um lado é igual ao outro", apenas 4 acrescentaram que se tratava de "uma equivalência" e 1 LC expressou como "equilíbrio"; porém 14 LCs indicaram o sinal de igualdade como um resultado, por exemplo, justificando com citações como: *"Significa que os resultados obtidos nas duas equações são valores iguais."* Ou: *"A soma do lado esquerdo tem resultado igual à soma do lado direito do sinal"*. |
| 9º - Nesta expressão: $8 + x = 4 + 5$, o que significa o sinal de igual "="? | Com relação a essa expressão, 7 LCS identificaram o sinal de igual como "equivalência"; 1 LC indicou que significava "equilíbrio"; 11 LCs expressaram entender o sinal de igual na expressão algébrica como um resultado, usando justificativas como: *"O valor desconhecido "x" somado a 8 tem resultado igual à soma de 4+ 5"*. |
| 10º - Quais as propriedades da igualdade que você conhece? | 1 LC respondeu que era passagem para o outro membro com mudança de sinal; 7 LCs disseram conhecer a "equivalência"; 3 LCs responderam: as propriedades reflexiva, transitiva e simétrica; 1 LC apenas mencionou a "reflexiva"; 1 LC respondeu "o princípio aditivo e multiplicativo"; 3 LCS responderam: "operações associativa", "mesma solução numérica", "igualdade entre valores"; 2 LCS não especificaram, responderam "todas"; 1 LC não respondeu. |
| 11º - Para você, qual a importância do sinal de igual no ensino e na aprendizagem da álgebra? | 9 LCs expressaram que a importância do sinal de igual era para resolver alguma operação; 1 disse que era "equivalência"; 3 LCs disseram que o |

| | |
|---|---|
| | sinal relacionava operações; 3 LCs expressaram outras conotações, mas não especificaram, como, por exemplo: "é um sinal primordial"; 1 LC disse que era "uma notação matemática"; e 2 LCs não opinaram. |
| 12º - Descreva de que forma você ensinaria um estudante da educação básica a resolver a expressão: 12 + 7 = 7 + ___. | 8 LCs descreveram o procedimento de ensinar a questão a um estudante da educação básica por meio de uma equivalência; 6 LCs descreveram o procedimento de ensino como se a igualdade fosse apenas para buscar um resultado, com as expressões: *"Faria ele resolver a adição que está no primeiro membro e perguntaria quanto falta de 7 para o tal número. Pois já que é uma igualdade, eles têm que dar o mesmo resultado".* 1 LC descreveu que começaria questionando: *"Qual número deve ser adicionado para que a balança esteja em equilíbrio?",* indicando o equilíbrio como uma metáfora para o ensino do conteúdo da igualdade. |

Fonte: autor

Dessa forma, observamos que as respostas dos licenciandos à 1ª questão coincidem com as ponderações de Teles (2002), Silva e Ribeiro (2014) e Azevedo (2017), os quais indicam ser a passagem da aritmética para a linguagem algébrica um dos motivos de dificuldades dos alunos. Por esse motivo, incluímos na TAP itens que envolviam erros cometidos pelos alunos (KFLM), com a finalidade de que os participantes refletissem sobre as possíveis causas que levaram os estudantes a apresentarem as resoluções constantes no instrumento utilizado no processo formativo.

Por tratar de assuntos que abrangiam os documentos curriculares oficiais, as questões nº 2 e nº 3 foram analisados em conjunto, pelo que encontramos lacunas baseadas nas respostas dos licenciandos nesses dois itens, em que os LCs demonstram pouco contato com os documentos curriculares oficiais, indo de encontro ao que defende Ponte (1999), o qual indica que o conhecimento do currículo (KMLS) é um dos domínios relevantes para o exercício da prática docente, pelo que entendemos a necessidade de incluir na TAP questões para reflexão dos participantes que abordem o subdomínio KMLS, relacionado ao conhecimento de níveis e de padrões de ensino.

Na 4ª questão, identificamos que os licenciandos têm concepções diversas acerca do ensino da álgebra (BRASIL, 1998), o que entendemos a necessidade de serem trabalhados na TAP temas que envolvam os subdomínios KoT e KMT, conforme indicados na pesquisa de Lautenschlager e Balvin (2021).

Identificamos, com os resultados da 5ª questão, que a maioria dos licenciandos (13 LCs) percebe que a álgebra possui várias conexões, tanto com conteúdos da própria matemática como com outras áreas do conhecimento, o que também remete às propostas da BNCC (BRASIL, 2018) para que os alunos possam trabalhar e interpretar problemas em variadas situações e contextos (KoT/KSM), por conseguinte, incluímos itens na TAP que também provocassem reflexões nos participantes sobre o conhecimento do ensino (KMT), por exemplo, com relação à adaptação de tarefas (para contextos intraconceituais ou interconceituais) ou se a tarefa matemática proposta na TAP poderia ser aplicada em outros níveis escolares (KFLM).

Na 6ª questão, identificamos que os licenciandos apresentaram justificativas diversas sobre os motivos para o baixo rendimento dos alunos com relação à aprendizagem da álgebra (KFLM) e assumem que isso se dá devido à má compreensão dos estudantes quando começam a aprender a álgebra formal (TELES, 2002; LESSA, 2005), pelo que também identificamos a necessidade de incluir questões na TAP sobre os subdomínios KoT, KFLM e KMT, que contemplam o conhecimento do conteúdo, das dificuldades e dos obstáculos conceituais dos alunos e o ensino do conteúdo algébrico (CARRILLO *et al.*, 2014).

Da questão nº 7, identificamos que apenas 8 LCs entendem a igualdade como "equivalência", concluímos, então, a necessidade de incluir na elaboração da TAP conteúdos relacionados com o subdomínio KoT, como as noções de equivalência e de equilíbrio (LESSA, 2005).

Identificamos que, de acordo com os resultado obtido na 8ª questão, os licenciandos, na sua maioria (14 LCs), ainda compreendem o sinal de igual como "operador", ou "um lugar para colocar o resultado" (KIERAN, 1981), pelo que incluímos itens na TAP que instigassem os futuros professores a refletirem sobre o significado do sinal de igual no contexto aritmético (KoT, KSM).

Da mesma forma que o item anterior, na 9ª questão, os licenciandos tendem a olhar o sinal de igual como um lugar que depois se coloca a resposta (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009), pelo que incluímos itens na TAP que levassem os futuros docentes a pensarem e a discutirem o significado do sinal de igual em um contexto algébrico (KoT, KSM).

Com relação ao 10º item do questionário, identificamos que os LCs não conhecem formalmente as propriedades da igualdade (KoT), mas, quando indagados sobre esse objeto matemático, responderam com várias acepções, conforme descritas no Quadro 11, pelo que, reforçando o que preconiza a BNCC sobre esse tema (BRASIL, 2018), construímos algumas questões da TAP para reflexão sobre esse conteúdo também devido à importância dada ao tema revelada na pesquisa de Teles (2002) e, obviamente, por ser o objeto matemático foco da nossa pesquisa.

No 11º item, identificamos que, ao sinal de igual, os LCs associam o significado de resolver a operação, enfatizando o que entende Spielmann (2019) quando explana na sua pesquisa com graduandos de que os discentes incorrem nos mesmos equívocos cometidos por alunos do EF quanto à compreensão do sinal de igual, pelo que também incluímos questões para reflexão sobre o sinal de igualdade na TAP, e também nos baseamos nas pesquisas de Trivilin e Ribeiro (2015), Miranda (2019), Barboza (2019) e Cosme (2007).

Com os resultados da 12ª questão, observamos que grande parte dos licenciandos (10 LCs) percebem o sinal de igualdade com o sentido operacional (KIERAN, 1981) e não fazem uso das propriedades da igualdade propostas na BNCC (BRASIL, 2018), pelo que, com base nesses resultados, direcionamos a TAP com a intenção de provocar discussões entre os LCs sobre as propriedades da igualdade (KoT) e sobre o ensino desse conteúdo (KMT), utilizando para isso uma tarefa matemática que contemplasse os conceitos de equilíbrio e equivalência e fosse trabalhada a metáfora da balança de dois pratos (LESSA, 2005).

Dos resultados produzidos no questionário, comparando com os conhecimentos evidenciados pelos discentes sobre o conteúdo da álgebra, da igualdade e das suas propriedades, sobre as dificuldades de aprendizagem dos alunos e sobre os documentos de parâmetros de aprendizagem da escola básica, entendemos ser muito evidente que o sinal de igualdade ainda é compreendido em boa parte do ensino e da aprendizagem no sentido operacional, como descreve Ponte, Branco e Matos (2009), ou seja, para "buscar um resultado".

Percebemos também que os licenciandos não fazem uso das propriedades da igualdade preconizadas pela BNCC ao resolverem uma tarefa sobre igualdade (BRASIL, 2018; KIERAN, 1981; TELES, 2002).

Observamos nos resultados do questionário que grande parte dos licenciandos (11 LCs) não conhece ou não teve contato com a BNCC, a maioria (16 licenciandos) disse não conhecer os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), consequentemente, identificamos que há lacunas com relação ao conhecimento dos parâmetros de aprendizagem da matemática (KMLS), o que possivelmente pode influenciar na prática futura, de acordo com Montes, Contreras e Carrillo (2013).

Com esses resultados, construímos a Tarefa de Aprendizagem Profissional (TAP), observando as recomendações de Ribeiro e Ponte (2020), para mediar o processo formativo, incluindo questões que: fomentassem discussões e enfatizassem os conhecimentos relacionados ao conteúdo matemático referente à noção de equivalência e de equilíbrio (KoT); solicitassem justificativas sobre os procedimentos matemáticos utilizados (KPM); provocassem reflexões sobre os erros e dificuldades dos alunos sobre a equivalência (KFLM); induzissem aos licenciandos expressar as conexões interconceituais entre temas (KSM); apresentassem recursos e atividades que poderiam ser utilizados para o ensino das propriedades da igualdade (KMT) e instigassem os futuros professores a relacionar a tarefa e o conteúdo com os níveis e padrões de aprendizagem (KMLS).

Ressaltamos que na construção da TAP nos respaldamos também nas observações feitas por Ponte (1999) quanto aos tipos de conhecimentos necessários para a docência (conhecimento do conteúdo, do aluno e de seus processos de aprendizagem, do ensino e do currículo) e por Santana, Serrazina e Nunes (2019, p. 13), em que alertam para que, na formação do professor, haja um diálogo entre a teoria e a prática "numa relação direta entre o conhecimento didático, a prática e o conhecimento curricular da matemática", de forma que buscamos incluir na TAP itens que relacionassem os subdomínios referidos e que contemplassem o que defendem esses autores sobre a formação docente.

## 5.2 Resultados, análise e discussões advindos do processo formativo

Passamos, então, à análise dos dados do processo formativo trazendo amostras dos episódios mais significativos.

Neste tópico, realizamos as últimas fases da nossa análise (interpretação e conclusão), segundo a perspectiva de Yin (2016), portanto, analisaremos e discutiremos, como antes mencionado, as categorias relacionadas aos nossos objetivos específicos (segundo e terceiro) para identificar os conhecimentos matemáticos e didáticos dos futuros professores, e também buscar compreender as Oportunidades de Aprendizagem Profissional (OAP) que emergiram do processo formativo.

Para apresentar a análise e discussão dos dados categorizados, tomando por base os subdomínios do MTSK, com os códigos utilizados no Quadro 9 (códigos usados na análise) e no Quadro 10 (categorias do MTSK das propriedades da igualdade), escolhemos algumas amostras dos episódios mais significativos que identificamos nos protocolos escritos da tarefa matemática (TM), nas Interações Discursivas dos Participantes (IDP) dos grupos (G1 e G2), e na plenária (PL), com relação à resolução da Tarefa de Aprendizagem Profissional (TAP), na sequência que foi posta no instrumento utilizado, isto é, primeiro analisaremos os dados oriundos da tarefa matemática (TM), depois seguiremos as questões propostas nos itens de "a" a "f".

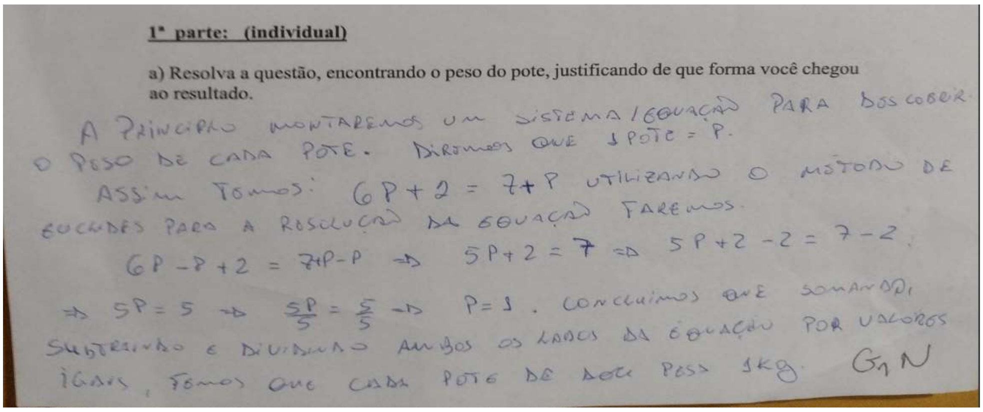
Esclarecemos que o momento da plenária (PL) ocorreu após as IDP dos grupos, contudo, para efeito de melhor visualização, intercalamos esses momentos com a análise dos itens da TAP, por exemplo: análise do item “a” da TAP, primeiro analisamos e discutimos o excerto do grupo G1, depois do grupo G2 e, por fim, o excerto da plenária relacionado ao item respectivo.

### 5.2.1 Item 1 da TAP (Tarefa Matemática)

Dos protocolos gerados na resolução da tarefa matemática (TM), verificamos que todos os licenciandos encontraram o valor correto do peso do pote de doce, atribuindo uma letra para representar o valor desconhecido e demonstraram, portanto, que possuem conhecimento KoT1 (sobre termos matemáticos) e KoT3 (procedimentos).

No entanto, identificamos que quatro LCs resolveram a TM pela técnica comentada por Almeida (2017), ou seja, a transposição de termos entre os membros da equação com troca de sinal, e apenas dois (LC2 e LC3) utilizaram as propriedades da igualdade, como podemos observar no protocolo gerado pelo licenciando LC3 na figura 14, e na transcrição do excerto G1[9-11] com relação às resoluções dos dois licenciandos LC2 e LC3.

**Figura 14: Resolução da TM do licenciando LC3 (G1)**


**1ª parte: (individual)**

a) Resolva a questão, encontrando o peso do pote, justificando de que forma você chegou ao resultado.

A PRINCIPIO MONTAREMOS UM SISTEMA/EQUAÇÃO PARA DESCOBRIR O PESO DE CADA POTE. DIREMOS QUE 1 POTE = P. ASSIM TEMOS: $6P + 2 = 7 + P$ UTILIZANDO O MÉTODO DE EUCLIDES PARA A RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO FAREMOS.

$6P - P + 2 = 7 + P - P \Rightarrow 5P + 2 = 7 \Rightarrow 5P + 2 - 2 = 7 - 2$

$\Rightarrow 5P = 5 \Rightarrow \frac{5P}{5} = \frac{5}{5} \Rightarrow P = 1$. CONCLUIMOS QUE SOMANDO, SUBTRAINDO E DIVIDINDO AMBOS OS LADOS DA EQUAÇÃO POR VALORES IGUAIS, TEMOS QUE CADA POTE DE DOCE PESA 1kg. G1 N

Fonte: pesquisa

Notamos que LC3, além de utilizar as propriedades da igualdade na resolução da equação, citou-as, justificando o porquê do método utilizado, o que evidencia os conhecimentos KoT1 (propriedades), KoT3 (procedimentos), e também KPM (prática matemática), conforme caracterização de Moriel Júnior e Carrillo (2014), que define esses subdomínios como conhecimentos especializados do professor, e ratificando o que foi explanado por Cabanha

(2018) acerca da diferenciação entre o conhecimento do procedimento (KoT3) e a justificativa no procedimento (KPM).

Além do mais, LC3 usou vários registros de representações para resolver a tarefa: a linguagem natural, a numérica e a algébrica, o que revela indícios de conhecimento KoT2, demonstrando também que o licenciando possui experiência algébrica sobre a interpretação da tarefa no contexto em que o problema é apresentado (KoT4), e no uso correto dos símbolos, o que manifesta maturidade na prática matemática (KPM) (RIBEIRO; ALMEIDA; MELLONE, 2021).

Assim, compreendemos que o licenciando revela conhecimento no âmbito do pensamento algébrico, conforme caracterização proposta por Almeida (2016) (estabelecer relações, operar com o desconhecido e construir significado), e também corroborar as constatações de Molina (2006) da necessidade de se entender o sinal de igual em contextos aritméticos e algébricos.

Identificamos ainda, ao analisarmos a discussão (IDP) ocorrida no grupo G1, sobre a resolução da TM, que LC3 sugere que a tarefa poderia ter sido resolvida por meio de "observação", que entendemos ser a compreensão do equilíbrio da balança, o que Lessa (2005) diz ser crucial para entender o princípio de equivalência numa equação polinomial do primeiro grau, conforme excerto G1[9-11]:

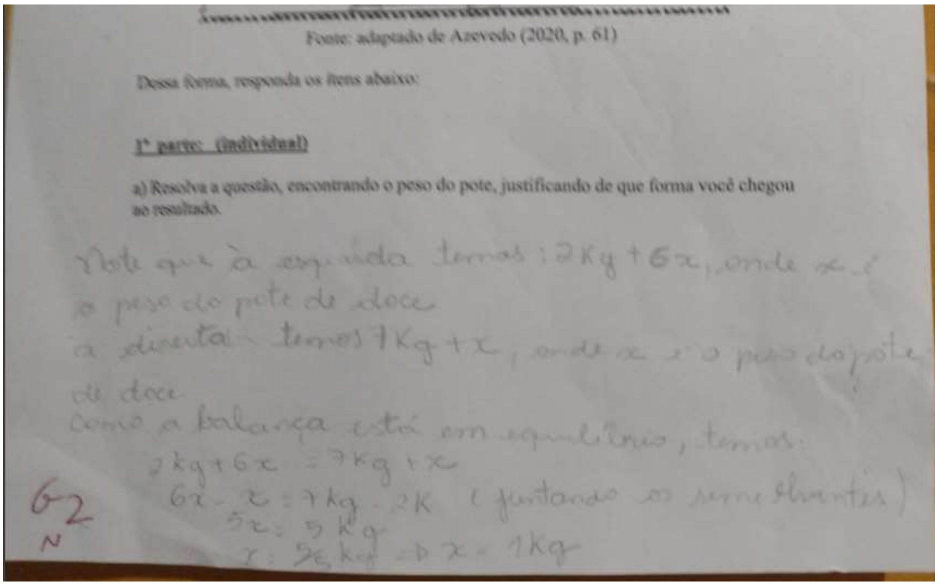
> 9 LC3: "*Eu gerei uma forma algébrica, considerei ter o valor do pote que é o valor de x, que ficou 6x + 2 = 7 + x. Esse x acabou sendo igual a 1. Seria outra forma de observação, ele tirava 2 kg de um pote de um lado, 2 kg de outro, aí sobrariam cinco potes de 5 kg. Cada pote seria 1 kg. São duas observações para serem seguidas. Uma por observação e a outra por fator algébrico.*"
>
> 10 LC1: "*Esse só fiz pela álgebra mesmo.*"
>
> 11 LC2: *"Eu defini os potes como x, que é um valor desconhecido, e, como ambos os lados estão em equilíbrio, têm o mesmo valor. Então, peguei seis potes do lado esquerdo: 6x + 2 = 7 + x, já que o lado direito só tem um pote de doce, aí cheguei no valor de 1kg."*

Nesse excerto, podemos identificar também que houve uma oportunidade de aprendizagem profissional (OAP), pois, no momento que LC3 indica haver outra forma de resolução da tarefa, e mostra como procedeu, os outros licenciandos passam a refletir sobre isso, podendo mudar a compreensão ou sua prática matemática, como identificaremos mais adiante na análise de um excerto da plenária.

Entendemos, portanto, que esse excerto está em consonância com as ideias de Ribeiro e Ponte (2020) quanto às potencialidades das interações dialógicas entre os participantes, e que isso pode ser compreendido como indício das OAP.

Antes, porém, trouxemos como amostra a resolução da licencianda LC4, participante do grupo 2 (G2), que citou o equilíbrio da balança, comparando as duas expressões de cada lado da equação, conforme protocolo na figura 15: "Como a balança está em equilíbrio, temos 2kg + 6x = 7kg + x", ou seja, notamos que a licencianda L4 resolveu a tarefa matemática para alunos do 6º ano utilizando a técnica de "passagem para o outro lado trocando o sinal", mas identificou uma relação de equivalência entre os dois membros da igualdade, não usando formalmente as propriedades da igualdade, mostrando, assim, possuir os conhecimentos KoT1 e KoT3.

**Figura 15: Resolução da TM da licencianda LC4 (G2)**


Fonte: adaptado de Azevedo (2020, p. 61)

Dessa forma, responda os itens abaixo:

1ª parte: (individual)

a) Resolva a questão, encontrando o peso do pote, justificando de que forma você chegou ao resultado.

Note que à esquerda temos: 2Kg + 6x, onde x é o peso do pote de doce
à direita temos 7Kg + x, onde x é o peso do pote de doce
Como a balança está em equilíbrio, temos:
2kg + 6x = 7kg + x
6x - x = 7kg - 2K (juntando os semelhantes)
5x = 5kg
x = 5kg/5 → x = 1kg

G2
N

Assim, mesmo que não tenha utilizado as propriedades da igualdade formalmente, ao identificar o princípio de equivalência, LC4 demonstrou o conhecimento KoT1, o que é respaldado por Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005) como indício de desenvolvimento do pensamento algébrico.

Também, a licencianda LC4 procedeu à resolução da TM com três registros de representações: a linguagem natural, a numérica e a algébrica, evidenciando o conhecimento KoT2, que, segundo Moriel Júnior e Carrillo (2014), indicam indício de conhecimento especializado do professor no domínio do conteúdo matemático.

No áudio da reunião do grupo G2, em que a licencianda LC4 pertencia, não houve discussão sobre como resolveram a TM (a primeira parte da TAP), ou seja, o grupo 2 passou a discutir logo o item "a" da segunda parte da TAP, porém, na plenária, o professor formador (PF) questionou como eles haviam resolvido a TM, o que podemos ver no excerto PL [13-32]:

13 LC1: *"O meu colega observou que, se ele tirar 2 kg e um pote de um lado, e 2 kg e um pote do outro, se ele tirar pesos iguais dos 2 lados, você vê que 5 potes vão dar igual a 5 quilos, ou seja, cada pote é igual a 1 kg."*
14 LC4: *"A gente fez mais na linha da álgebra. Quando resolveu a questão, colocou como x o valor que a gente não sabia, somou e fez o jogo de sinal."*
15 PF: *"Nesse caso, você está chamando de álgebra colocando um x? Qual seria a substituição que vocês fariam? O que vocês fizeram? Vocês substituíram o quê pelo x?"*
16 LC4: *"O pote, porque, se de um lado havia um pote só, a gente já poderia chamar aquele pote de x. O peso daquele pote, no caso, seria 1x, e no outro lado havia 6 potes, que a gente não sabia o peso deles, então chamamos o peso do pote de x, como vimos que a balança estava em equilíbrio, o que tinha em um lado era igual ao que tinha no outro, aí, fizemos operações com álgebra, no caso, usamos um valor desconhecido."*
17 PF: *"Quais foram as operações que vocês fizeram para encontrar o valor de x?"*
18 LC4: *"A gente usou a soma dos 2 lados, multiplicando 1/5 e encontramos o peso do pote que é igual a 1 kg."*
19 PF: "*E vocês? Como foi que vocês fizeram para encontrar?"* (se dirigindo ao grupo 1).
20 LC3: *"A primeira, eu fiz por álgebra mesmo, e depois eu vi que poderia sair de outra forma. No momento em que você tem 2 kg e um pote juntinho de um lado, e 2 kg e um pote juntinho do outro, você sabe que aquilo ali tem o mesmo peso. Aí, você retira, mantém o equilíbrio, então você passa a ter 5 potes e um peso de 3 e outro de 5, um peso de 3 e outro de 2 , você tem 5 potes igual a 5 kg, 5 potes iguais, então seria mais como observação, ou seja, para o aluno que não conhece álgebra ainda, mas, por observação, por manipulação ele conseguiria perceber isso."*
21 PF: *"Vocês percebem se tem alguma coisa que é próximo do método que o outro grupo utilizou? Quais as ideias que são próximas?"*
22 LC1: *"Subtrair dos 2 lados?"*
23 PF: *"Subtrair o quê dos 2 lados?"*
24 LC1: *"A mesma quantidade."*
25 PF: *"Só que, nesse caso que LC1 falou, ele está usando a mesma representação que o problema, e vocês fizeram uma transposição de representação?"*
26 LC4: *"Mas, nesse caso, quando é dada a questão dos pratos, um lado já tem os 2 kg que é identificado, e no outro lado que eu acho que foi assim que L1 observou, em um lado tem os 2 kg, o que tem na questão e no outro lado tem 3 kg, 2 kg e 2 kg, no caso você tirou um daqueles 2 kg, foi isso?"*
27 LC1: *"Mais o pote."*
28 LC4: *"Ah, mais o pote!"*
29 LC1: *"Isso, mais o pote."*
30 LC4: *"Ficaram 5 kg."*
31 LC1: *"Sim, e do outro, eu tirei 2 kg mais um pote e ficaram 5 potes, deixar só potes de um lado, atribuir valor a cada um."*
32 LC4: "*Ah, entendi! Deixaram só potes de um lado, isso é* superinteressante!"

Nesse excerto da plenária (PL), compreendemos, primeiramente, que as interações discursivas (IDP), provocadas pelo professor formador (PF), resultaram em oportunidades de aprendizagem aos futuros professores pela forma como a licencianda LC4 denominou de "superinteressante" o que havia entendido, inclusive quando o PF aproveitou o que LC2 havia aprendido de outro colega (no início do excerto, linha 13, LC2 cita a maneira de raciocínio utilizada pelo colega LC3).

De forma que, na resolução da TM, tanto nos protocolos analisados quanto nas discussões entre os grupos, e também na plenária, foram identificados conhecimentos do conteúdo matemático (KoT), por exemplo, na utilização de termos matemáticos, de registros de representação, dentre outros, evidenciados pelos discentes, segundo a classificação de

Carrillo *et al*. (2014), assim como, conhecimentos das propriedades da igualdade (BRASIL, 2018), da noção de equilíbrio (LESSA, 2005), da noção de equivalência (LESSA, 2005); da mesma forma, os futuros professores revelaram indícios de KPM (justificação da utilização de procedimentos), além de havermos compreendido que as IDP trouxeram oportunidades de aprendizagem aos futuros professores (RIBEIRO; PONTE, 2020).

### 5.2.2 Item "a" da parte 2 da TAP

No item "a" da TAP, cuja questão era "Você concorda com as respostas dos quatro alunos acima? Justifique", apresentamos como amostra a fala de LC1 (linha 9) do grupo 1:

9 *LC2: "O terceiro aluno raciocinou correto, para chegar ao resultado do valor procurado, ele fala: retirando 2 kg do prato da direita, 2 kg da esquerda, ele está subtraindo de ambos os lados a mesma quantidade, logo, a igualdade permanece."*

Verificamos que LC2, com essa fala, possui o conhecimento KoT1, relacionado às propriedades da igualdade, o que também foi constatado na resolução da TM, pois ele foi um dos licenciandos que utilizou essas propriedades.

E com relação ao grupo 2 (G2), temos como amostra o excerto G2[3-14]

3 LC4: *"O primeiro item, um aluno respondeu que cada pote de doce tem 2 kg, seria visualmente que ele achou que um lado tem o dobro do outro?"*
4 LC5: *"Se um lado tivesse o dobro do outro não iria dar 2 kg."*
5 LC6: *"Que iriam ficar 2× 1, 2, 3, 4 ,5, 6...12+2 = 14 quilos iam ficar de um lado. No outro lado, iriam ficar 3,5,7,9... não ia ser o dobro."*
6 LC5: "*Ele só fez a conta errada."*
7 LC4: "*Tu achas que ele só fez a conta errada? Achas que ele não foi induzido por nada?"*
8 LC6: *"Pelo menos eu não encontrei nada para ele ser induzido a dizer que é 2."*
9 LC4: *"Então, tu achas que ele 'chutou'?"*
10 LC5: *"Sim."*
11 LC4: *"Então, na primeira situação, ele pode ter 'chutado'..."*
12 LC5: *"Então, tem as perguntas, eu acho que é."*
13 LC6: *"A não ser que, por exemplo, o desenho do peso de 2 kg, aparenta ser duas vezes o tamanho do pote."*
14 LC4: *"É verdade, bem colocado! É verdade!"*

Verificamos, nesse excerto, que os licenciandos conhecem termos matemáticos, demonstram que, pelo fato de terem resolvido a TM e achado o valor correto do pote (KoT1), eles conseguem identificar o erro cometido pelos alunos, manifestando conhecimento das características de aprendizagem (KLFM), registramos ser um conhecimento de suma importância para promover aprendizagem aos alunos; contudo, de acordo com Ferreira, Ribeiro e Ribeiro (2017, p. 503), não é necessário apenas que o professor identifique o erro, mas, sim, que saiba o porquê de o aluno tê-lo praticado.

Assim, verificamos que LC6 traz uma sugestão para o possível erro cometido pelo aluno, dizendo na fala da linha 13, que poderia ser porque "*o desenho do peso de 2 Kg, aparenta ser duas vezes o tamanho do pote*", o que identificamos que essa observação demonstra que o licenciando LC6 possui indícios de KMT2 (atividades, exemplos, tarefas e ajudas) e também KFLM (aprendizagem, erros, dificuldades do aluno), assim como, o futuro professor revela conhecimento sobre a forma que um docente deve proceder ao escolher tarefas para o ensino de seus alunos, o que se encontra no âmbito do subdomínio KMT (conhecimento do ensino de Matemática).

Nesse mesmo excerto, verificamos indícios também do KFLM (aprendizagem, erros, dificuldades do aluno), que remete ao cuidado de o professor verificar se desenhos, palavras, frases vão ou não induzir o aluno ao erro, corroborando o que Carrillo *et al.* (2014) entende como conhecimento de características do aprendizado da Matemática (KFLM).

Nas interações discursivas dos participantes (IDP), indicadas no excerto, e pelo que foi analisado no parágrafo anterior, compreendemos que, houve oportunidades de aprendizagem profissional, pois a observação de LC6 gerou aprovação da licencianda LC4, quando ela expressa: *"É verdade, bem colocado! É verdade!"*, ou seja, demonstrando que aquela possibilidade sugerida por LC6 a fez refletir sobre o motivo pelo qual o aluno incorreu em erro, tratando-se de um episódio que Ribeiro e Ponte (2020, p.6) ressaltam sobre as características potenciais das IDP como "um meio para favorecer aprendizagem profissional aos professores".

No momento da plenária, com relação ao item "a" da TAP, o professor formador questionou se os licenciandos concordavam, ou não, com as respostas dos quatro alunos da tarefa, a fim de que fossem justificados os erros ou acertos que identificaram, conforme excerto PL [3-11]:

3 PF: *"Uma questão que a gente tinha que fazer quando estava no grupo era ver se as respostas que os alunos tinham colocado estavam certas, se vocês concordavam ou não com as 4 respostas dos alunos. E aí? Como foi que vocês responderam? Vocês concordam com todas as 4 respostas? Vocês discordaram de algumas?"*

4 LC1: *"A gente discordou das 3. Só uma que estava certa."*

5 PF: *"Qual que estava certa?"*

6 LC3: *"A do terceiro aluno. Os demais alunos, que eram o segundo, o quarto e o primeiro, apresentaram situações que implicavam desequilíbrio."*

7 PF: *"E vocês? Colocaram como? (pergunta aos componentes do grupo 2)*

8 LC4: *"A gente não concordou com as respostas dos 4. Apenas o terceiro chegou à conclusão correta do item, e a gente tentou identificar por que os outros chegaram a essas respostas. A gente achou que foram meros chutes, porque analisando a balança,*

*não identificamos por exemplo, o primeiro caso, por que o aluno chegou a 2 kg? Poderia ser por quantidade? O dobro? Aí, a gente não conseguiu concluir como ele teria chegado, então, foi mais uma questão de achar que o aluno teria chutado aquela resposta."*

9 LC5: *"Ou errado a conta!"*

10 LC4: *"É, ou é errado a conta, mas qual tipo de conta ele teria realizado? Qual a lógica ele teria realizado para chegar ali? A gente não conseguiu concluir qual lógica ele usou para chegar naquele resultado. Vocês tentaram entender essa lógica?" (Falando com o componentes do outro grupo)*

11 LC3: *"Então, quando a gente resolveu o problema para identificar o valor de cada pote inicialmente, eu pelo menos, eu fiz tentando me colocar no lugar do aluno, se eu vi que está em equilíbrio, eu vi que tem uma igualdade, então, eu vou tentar achar o valor de cada peso utilizando um método. Eu utilizei o método de Euclides, que era somar, subtrair e dividir as mesmas quantidades dos 2 lados, para poder obter o valor de cada pote, e aí, se o aluno fez conforme eu fiz, utilizando esse método, o primeiro, quando chegou à conclusão que pesava 2 kg, ele fez algum erro no meio do caminho."*

Observamos que por meio do questionamento do professor formador, os licenciandos LC3 e LC4 evidenciaram conhecimentos KoT (conceitos, procedimentos, uso da lógica) e KFLM, pois identificaram os erros cometidos pelos alunos e tentaram entender o porquê desses equívocos.

Além disso, entendemos que, nesse momento da plenária, as OAP foram evidenciadas (RIBEIRO; PONTE, 2020), pois, a partir da discussão levantada pelo PF, o licenciando LC3 (linha PL [11]) explicou para todos os presentes a utilização do princípio aditivo para resolver a questão, tentou justificar o erro do aluno comparando com a resolução que obteve quando expressou "...eu fiz tentando me colocar no lugar do aluno..." e observou que a noção de equilíbrio era um fator importante para entender o contexto da tarefa, de acordo com as observações de Berricha e Saraiva (2009, p. 4): "A noção de equilíbrio é fundamental na resolução de equações. Este equilíbrio é traduzido pelo sinal de igual".

### 5.2.3 Item "b" da TAP

No item "b" da TAP "Em qual ano escolar essa questão poderia ser aplicada? Por quê?", trouxemos como amostra o excerto G1 [28-46] da reunião do grupo G1:

28 LC1: "*Para mim, no sétimo ano, porque é quando os alunos começam a ver álgebra.*"

29 LC3: "*Mas a questão pode ser resolvida sem álgebra.*"

30 LC2: "*Pode.*"

31 LC1: "*Essa é a questão que podemos ver também.*"

32 LC2: "*Mas no sexto ano nós também vemos um pedaço de álgebra, quando estudamos os polígonos, números fáceis, arestas, vértices, já tem a primeira fórmula para eles trabalharem.*"

33 LC3: "*Eu fico pensando se isso não poderia já até ser trabalhado na série anterior, utilizando apenas as questões da observação. Se você retirar dois pesos de 2 kg de*

*um lado, mais um pote de 2 kg de outro, já saberia. Seria uma forma de trabalhar a abstração dos alunos, incentivar, estimular*."

34 LC2: "*Isso seria a partir do 6º ano, na antiga quinta série.*"

35 LC3: "*Certamente.*"

36 LC1: "*É possível, se a gente não olhar pelo lado da álgebra*."

37 LC3: "*Porque nessa fase...nessa fase dos 10 anos, eles começam a perceber a abstração. Eles começam a ter o primeiro contato com a abstração da fração, entre 9 e 10 anos de idade.*"

38 LC2: "*Se eles fossem tentar desenvolver pelos métodos de álgebra, eles não teriam a ferramenta para fazer, seria só por esse modo de observação aí.*"

39 LC1: "*Mas o início seria bem mais suave, por que... qual a dificuldade do aluno quando eles transitam da aritmética para álgebra? É entender que, no lugar de números, posso usar letra.*"

40 LC3: "*Quando a gente começa a trabalhar a abstração deles, logo no início, fazemos eles entenderem que mais na frente o número pode ser representado por uma letra.*"

41 LC1: "*Ele sabe que pode representar qualquer número, a compreensão dele vai ser bem mais positiva, digamos assim*."

42 LC3: "*É mais aquela coisa, o poder da observação deles é uma coisa que precisa ser trabalhada. É uma coisa que pode ser observada deles e a questão de analisar a capacidade de análise de situações, isso é, questão aritmética e como se a álgebra fosse uma ferramenta. Para resolver um problema, mas a questão da observação, que é importante, eles podem olhar e desenvolver uma estratégia.*"

43 LC2: "*E você não fica preso às regras.*"

44 LC3: "*É uma coisa importante a capacidade de análise e poder usar isso na álgebra*".

45 LC1: "*Ou em qualquer outra área*."

46 LC3: "*Exatamente.*"

Nesse excerto, verificamos que o LC1 entende que a tarefa matemática (TM) só possa ser aplicada para o 7º ano do EF, quando começa o ensino da álgebra formal, porém o LC3 afirma que *"...pode ser resolvida sem álgebra."*

Já o LC2 indica que a TM pode ser trabalhada no 6º ano do EF, inclusive citando a nomenclatura que esse nível possuía no passado (5ª série), demonstrando conhecimento KMLS, que trata sobre "conteúdos matemáticos que são requeridos para o ensino e níveis de desenvolvimento conceitual e procedimental esperado dos alunos" (CARRILO *et al*., 2014), também comentando sobre o 6º ano do EF já ter contato com a álgebra, citando o uso de letras nas fórmulas de geometria (polígonos, arestas), o que também revela conhecimento KSM (conexões com conteúdos passados).

Diante disso, podemos observar, até mesmo nos resultados do questionário prévio, que ainda prevalece uma concepção muito enraizada entre os licenciandos de que a álgebra só se limita ao uso de letras, como identificamos na fala de LC1: "*É possível, se a gente não olhar pelo lado da álgebra*" (linha 36) reforçando a mesma ideia na linha 39, entendimento esse que Almeida (2017) chama à atenção para o fato de que perceber a álgebra dessa forma "é, a princípio, reduzi-la a uma linguagem, a linguagem simbólica algébrica, formada essencialmente por símbolos e letras para representar valores, muitas vezes desconhecidos" (ALMEIDA, 2017, p. 2).

Esse entendimento se contrapõe ao que a BNCC preconiza sobre as habilidades em álgebra com a ênfase no desenvolvimento do pensamento algébrico (BRASIL, 2018, p. 270), ou seja, com o que também Almeida (2017, p. 3) defende de que "a álgebra se revela muito mais na maneira do sujeito pensar, em detrimento da linguagem utilizada para expressar esse pensamento", pelo que detectamos haver uma lacuna que necessita de mais intervenções por meio de promoções de oportunidades de aprendizagem profissional na formação inicial, nesse aspecto e com esse tema, pois, possivelmente, esse entendimento e essa concepção da álgebra o futuro professor levará para a sua prática escolar (BRASIL, 1998).

O LC3, porém, indica que a TM poderia ser trabalhada em séries anteriores pelo método que ele chama "observação", já discutido anteriormente, que, pela forma como o discente procedeu à resolução da TM, verificamos o emprego das propriedades da igualdade, e o licenciando reforça isso na fala "*Se você retirar dois pesos de 2 kg de um lado, mais um pote de 2 kg de outro, já saberia. Seria uma forma de trabalhar a abstração dos alunos, incentivar, estimular"*, pelo que também identificamos que LC3 possui o conhecimento KMT1, que se relaciona com o conhecimento de atividades, tarefas, exemplos, ajudas, assim como, revela o KFLM, relacionado às características de aprendizagem dos alunos no âmbito das potencialidades que possam ser trabalhadas na prática.

Constatamos, portanto, que os licenciandos do grupo G1 possuem alguns conhecimentos dos parâmetros de aprendizagem de matemática KMLS, porém necessitam compreender a álgebra como uma forma de pensar (Almeida, 2017), e não ficarem adstritos à concepção da álgebra apenas letrista (BRASIL, 1998).

Os licenciandos também demonstram conhecer termos matemáticos (KoT1), por exemplo: "*polígonos, arestas, vértices"*.

Com relação ao grupo G2, trouxemos o excerto G2[27-36]:

| | |
|---|---|
| 27 | LC4: "*letra b: em qual ano escolar essa questão poderia ser aplicada? Porque, para mim, ela poderia ser aplicada no sexto ano só visualmente. Eles iriam trabalhar com números. Mas ela também poderia ser aplicada no sétimo ano, que você poderia fazer como eu fiz, uma equação.* |
| 28 | LC6: "*Introdução à álgebra*?" |
| 29 | LC4: "*Introdução à álgebra. Ela pode ser trabalhada na área de pesos e grandezas*." |
| 30 | LC6: "*Formas e grandezas e medidas. Formas e grandezas é o quê? Sétimo ano?"* |
| 31 | LC4: "*Mas eu acho que isso aqui pode ser trabalhado no sexto ano, então, grandezas e medidas no sexto ano e, no sétimo ano, eu acho que já é muito leve para dar peso e medidas*." |

32 LC5: “*Dá sim*”.

33 LC6: “*Aqui já é mais introdução à álgebra. Entendeu por que essa parte da introdução aí?”*

34 LC4: *“Para o sexto ano, trabalhar com grandezas e medidas. Para o sétimo ano, introdução à álgebra. Dá para trabalhar nos 2 anos.”*

35 LC5: *“Porque, aí, que ele começa a atribuir o valor à letra, não é?”*

36 LC4: *“Exatamente, está entendendo? Não fizemos, e aqui, olha, essas resoluções aqui, a primeira, a segunda e a terceira resoluções são exatamente que usamos, exatamente a matemática normal. Eu coloquei 1 kg, mas usamos os números normais, não usa letra? Então, podemos abordar para o sexto ano e para o sétimo ano.”*

Constatamos a mesma lacuna do grupo anterior com relação à visão da álgebra, ou seja, os LCs sempre mencionam nas suas falas a álgebra com uma concepção letrista (BRASIL, 1998), ratificando o que foi evidenciado na pesquisa de Lautenchangler e Balvin (2021) sobre a pouca familiaridade dos futuros professores com as várias concepções de álgebra apresentadas na literatura.

Verificamos, ainda, que os licenciandos demonstram o conhecimento KMLS no que se refere aos níveis de desenvolvimento conceitual e procedimental esperado dos alunos e padrões de aprendizagem, pois detectaram que a TM poderia ser utilizada em dois níveis de ensino (6º e 7º anos do EF), além de manifestarem conhecimentos KoT1 (termos matemáticos: áreas, grandezas e medidas).

Além disso, identificamos que os licenciandos possuem conhecimento do KSM (conexões com conteúdos passados e presentes), quando mencionam que poderiam trabalhar a tarefa com outros temas matemáticos (números, medidas, equações).

Compreendemos, também, que das IDP dos dois grupos emergiram oportunidades de aprendizagem profissional (OAP), pois, em cada grupo, surgiu um licenciando (no G1, o licenciando LC3 e, no G2, a licencianda LC4) que argumentou sobre a utilização da TM para ser trabalhada em dois níveis de ensino (6º ano e 7º ano do EF), havendo sido confirmada e acatada essa possibilidade pelos outros participantes, o que Ribeiro e Ponte (2020, p. 6) indicam como característica dessas interações discursivas “envolver os professores em um ambiente que se promova argumentação e justificação”.

Na plenária, com relação ao item “b” da TAP, os licenciandos praticamente repetiram o que haviam discutido nas IDP nos grupos, mesmo quando o PF lançou a pergunta: *“Vocês repararam se a questão era de álgebra mesmo? Vocês tiveram a ideia de quê?”*, conforme excerto PL[62-75]:

62 PF: *“Para vocês, qual ano escolar aplicariam essa atividade?*

63 LC4: *“Sexto e sétimo ano.”*

64 PF: *"Sexto e sétimo? Ou: sexto ou sétimo?"*
65 LC4: *"Sexto ou sétimo."*
66 PF: *"Por quê?"*
67 LC4: *"Porque, no sexto, ele pode abordar, como LC6 abordou, usando apenas a lógica de tirar números, como ele também fez e, para o sétimo ano, seria uma forma de álgebra, de introduzir a álgebra."*
68 LC2: *"Nós colocamos no sexto e no sétimo, porque, no sexto, trabalhamos mais a abstração dos alunos e, no sétimo, a gente aplica essa abstração na álgebra mesmo."*
69 LC4: *"Eu até coloquei para o sexto e sétimo ano do ensino fundamental, a depender da habilidade que o professor busca explorar, ou seja, depende do que o professor busca da turma. Foi exatamente isso que eu coloquei."*
70 LC5: *"Exatamente."*
71 PF: *"Vocês repararam se a questão era de álgebra mesmo? Vocês tiveram a ideia de quê?"*
72 LC1: *"Equação"*.
73 LC4: *"Equação do primeiro grau."*
74 LC1: *"Aí, existe a noção inicial de trocar o valor por uma letra. Eu vou dizer que aquilo é um valor, um peso eu vou dizer que é x e trocar por uma variável, um valor desconhecido que vou mudando, vou deixando o fixo."*
75 LC2: *"No sexto ano, eles vão começar a entender que podemos representar o número por uma letra e que, essa letra, pode ser representada por qualquer número. Aí, quando eles tiverem o primeiro contato de fato com a equação de primeiro grau, eles não vão estranhar tanto, se estudar em sequência."*

Neste excerto da PL, identificamos os mesmos conhecimentos sobre níveis de ensino (KMLS) dos licenciandos com aquelas observações que fizemos quando analisamos as IDP que ocorreram nos grupos, além de identificarmos que eles fazem conexões entre os conteúdos passados, revelando conhecimentos no âmbito do subdomínio KSM.

Reiteramos que a maioria dos licenciandos mantiveram as falas que denotam a ideia da álgebra apenas como algo que remete às letras no lugar dos números, mesmo quando provocados pelo PF com a pergunta: "*Vocês repararam se a questão era de álgebra mesmo?"*.

A abordagem do professor formador se baseia em Almeida (2017, p. 3) no exemplo que expõe com duas expressões: "7 + 5 = 12" e "2X + 3 = 15" e questiona se elas são "álgebra ou aritmética", respondendo que "depende", pois, quem vê a álgebra apenas como letras e a aritmética apenas como números, dirá que a primeira expressão é aritmética e, a segunda, álgebra.

Porém, esse autor (p. 3) ressalta que não é a forma como a expressão se mostra "que diz se ela pertence ao domínio da álgebra ou da aritmética, mas o que o sujeito pensa sobre ela", trazendo luz sobre isso quando argumenta que

> Se ele entende o sinal de igual como uma simples ação para se chegar ao valor da adição "7 + 5", isto é, o sinal de igualdade apresenta um significado operacional (KIERAN, 1981) correspondendo a uma ação a ser realizada, essa expressão estaria no campo da aritmética. Porém, se o sujeito consegue perceber que o sinal de igual significa que existe uma equivalência entre o termo antes da igualdade e o termo depois da igualdade, se ele entender que "7 + 5" equivale a 12, ou seja, é igual a 12, essa expressão deixa de ser pensada pelo sujeito como uma expressão aritmética e passa a ser pensada como algébrica (ALMEIDA, 2017, p. 3).

Da mesma forma, com relação à expressão “2X + 3 = 15”, que será pensada como uma expressão algébrica, não apenas por conter letras e números, mas se o estudante entender o sinal de igual como uma equivalência, ou seja, com isso, identificamos uma lacuna que compreendemos ser necessária para ser discutida em formações de futuros professores de matemática, ou seja, trazer oportunidades de aprendizagem profissional para que discussões sobre as concepções de álgebra (BRASIL, 1998) venham aprimorar o conhecimento profissional dos futuros docentes sobre a álgebra, o sinal de igual e o pensamento algébrico, de acordo com o que propõe a literatura e o documento oficial curricular, a Base Nacional Comum Curricular.

### 5.2.4 Item “c” da TAP

No item “c” da TAP, em que constava a questão “Você faria alguma adaptação nessa atividade? Qual? Por quê?”, trouxemos como amostra o excerto G1[48-53] referente às IDP do primeiro grupo G1:

| | |
|---|---|
| 48 | LC2: “*Se fosse para aplicar no sexto ano, não”.* |
| 49 | LC1: “*No sexto ano, eu não aplicaria”.* |
| 50 | LC2: “*Eu acho desnecessário, mas se fosse no sexto ano acho que não tinha como não... o que eu quero dizer, é que eu não faria nenhuma adaptação se fosse dada no sétimo ano, quem sabe no sexto?”* |
| 51 | LC1: “*Seria viável ao nível fundamental? Não sei se seria viável.”* |
| 52 | LC2: “*Talvez no oitavo ano poderíamos adicionar outra balança, com outra configuração e, talvez, montar um sistema de duas equações. Isso para série mais avançada do fundamental, talvez fosse possível.”* |
| 53 | LC3: “*Poderíamos trabalhar aqui a questão de: em que série faria isso? Uma espécie de combinação. Trocar, por exemplo, quantos potes? Qual é a quantidade máxima de potes que podem ficar em um dos lados e qual a quantidade mínima de potes que pode ficar em um dos lados.”* |

Nesse excerto, verificamos que LC3 lança uma proposta de adaptação da tarefa para uma mais dinâmica, e que poderia ser aplicada do 6º ano em diante, trabalhando com quantidades máximas e mínimas, revelando, assim, o conhecimento KSM (conexões com conteúdos futuros) e o KMT2 (atividades, exemplos, tarefas e ajudas); enquanto o LC2 revela, além do conhecimento KMT2, o KSM (conexões com conteúdos futuros), pois mostra que adaptaria a tarefa para assuntos mais avançados como sistema de duas equações.

Identificamos, ainda, que os três licenciandos possuem conhecimento de conteúdos relacionados a níveis de ensino, que se encontra no subdomínio KMLS.

Com relação ao grupo G2, trouxemos o excerto G2[46-64]:

46 LC4: *"Você faria alguma adaptação nessa atividade? Qual? Por quê? Eu não pensei em nenhuma possibilidade."*

47 LC6: *"Sabe o que eu faria? Poderia trocar o peso, assim: colocar pesos diferentes. Não só com peso unitário. Não, colocar um maior, um menor, um que seja o dobro do outro...Acho que isso iria mexer mais com a cabeça dos alunos, dizer assim: um peso a um peso b, em que o b é o dobro do peso a, acho que isso iria causar mais situações de desequilíbrio. Tirar um, a pessoa tem que analisar. Tirar outro, e a pessoa ter que deixar 2 do outro lado."*

48 *LC4: " É, aí se desse, iria aplicar no sétimo ano? Já seria mais algébrico mesmo".*

49 LC6: *É acho que sim, ia começar a dizer um é x; outro é y. Um é o dobro do outro, x é igual a 2y... É mais para sistema de equação algébrica, não é? Sistema linear."*

50 LC4: *"Isso! Como é que tu disseste? Fala aí!"*

51 LC6*: "Assim: que adaptação poderia haver na atividade? Poderia colocar pesos diferentes, pesos com valores diferentes, valores e formas diferentes?"*

52 LC4: *"Pesos, poderia ser potes com formatos diferentes, sim? Que os potes têm os mesmos formatos,  não é?"*

53 LC6: *"É, poderia colocar assim: deveria colocar tudo igual, poderia colocar esse aqui sendo 2, outro pote? E dizer que esse pote aqui é "b" e que, desse aqui, é "a", sim? Normal."*

54 LC4: *"Poderia colocar um pote com outro formato, tendo o dobro de um deles".*

55 LC6: "*De um unitário? Que tem de 1 kg?"*

56 LC4: *"É, exatamente, porque, esse daqui, só tem um pote, e nesse outro aqui poderia fazer modificações."*

57 LC6: *"Porque é justamente o que eu acho, que o erro que cometeram, é por causa disso, porque atribuíram os valores errados aos valores de cada pote, por isso que errou essas questões aqui de cima."*

58 LC4: *"Colocar potes com pesos diferentes, com pesos e formatos diferentes? Porque vê se por exemplo, é?"*

59 LC6: "*Pode ser só com pesos diferentes, porque se é peso diferente, o formato deles também é diferente."*

60 LC5: *"É, consequentemente..."*

61 LC4: *"É, mas o que eu digo de formato, por exemplo, o formato poderia ser mais reto, outro mais comprido..."*

62 *LC5: "Eu entendi: em vez de ficar tudo reto, outro ser mais comprimido, outro ser um pouco mais diferente, só o formato do pote, não é? Para confundir."*

63 LC4: *"Colocar potes com pesos e valores mais variados, mas mantendo o equilíbrio, porém que mantivessem o equilíbrio".*

64 LC6: *"Para que o aluno possa descobrir os valores de cada pote."*

Com esse excerto, identificamos que os licenciandos revelam conhecimento de termos matemáticos e da analogia entre a equivalência e o equilíbrio (KoT1), conhecimentos de que poderiam adaptar as tarefas para outras configurações, o que estaria na categoria de atividades, exemplos, tarefas e ajudas (KMT2), e também revelam indícios do KPM (conexões com conteúdos futuros), quando LC6 indica que poderia adaptar a tarefa para sistema linear.

Também compreendemos que os discentes, no decorrer do diálogo, vão modificando o entendimento sobre possíveis adaptações da TM, bem como sobre o uso das propriedades da igualdade, corroborando o pensamento de Ribeiro e Ponte (2020, p. 6) quando indicam que as discussões entre os participantes são um meio “para favorecer aprendizagem profissional aos professores”.

Por exemplo, no início do diálogo, a LC4 diz não ter pensado em nenhuma possibilidade (linha 46) de adaptação da tarefa, no entanto, no decorrer das IDP, a licencianda começa a delinear a ideia de transformar a tarefa para outro nível de ensino e com outro tipo de configuração, conforme linhas 52, 54, 56 e 58.

Na plenária, o que identificamos e compreendemos nos dois últimos parágrafos anteriores fica mais evidente no excerto PL[88-89]:

88 PF: *“E vocês? Fizeram alguma adaptação?”*

89 LC4: *“Sim, sugerimos a ideia de mudar para pesos variados, variar os pesos, no caso, peso de 2, de 4..., para fazer composições, de como o aluno iria compor para manter o equilíbrio”.*

Ou seja, a licencianda LC4 assume como ideia a sugestão de outro participante do grupo sobre a reconfiguração da TM, quando, antes do diálogo, não havia imaginado nenhuma adaptação para a tarefa, o que confirma a relevância das IDP (RIBEIRO; PONTE, 2020).

Com relação ao primeiro grupo (G1), no momento da plenária em que foi discutido o item “c” da TAP, não houve alteração do que foi falado nas IDP entre eles (excerto G1[48-53]), pelo que não identificamos algum episódio significativo para registrar.

### 5.2.5 Item “d” da TAP

No item “d” da TAP, tendo como questão “Que recursos (físicos ou digitais) você usaria para ensinar essa tarefa aos alunos no ensino fundamental? Justifique.”, trouxemos como amostra o excerto G1[62-65] do grupo G1:

| | |
|---|---|
| 62 | LC2: “*Essa questão entra, no meu entender, na parte dois, no item “d”, que pergunta sobre os recursos físico e digitais”.* |
| 63 | LC1: “*No ensino fundamental?”* |
| 64 | LC3: “*O ideal seria você ter a balança física, na sua frente, para fazer com que os alunos manipulassem e percebessem o quanto você pode formar grupos de objetos isolados do outro, e em cada grupo quantos potes máximos eu posso colocar de um lado, quantos do outro, isso seria uma das questões. Na outra questão, você pode colocar quantas combinações, seja de forma a manter o equilíbrio, quantas combinações de potes ou pesos.”* |
| 65 | LC2: “*Eu pensei também usar aplicativo digital, mas aí ficaria muito abstrato do que com a balança física. A balança seria melhor, eles iriam sentir o peso de cada pote, e o peso usado para balancear, e estavam vendo a balança. Eu acho que a balança física é a mais indicada.”* |

Identificamos, pois, nessa passagem, que dois licenciandos (LC2 e LC3), ao citarem a balança física como um tipo de recurso para auxiliar o ensino daquele conteúdo da TM, revelam conhecimentos KMT1, e o LC2 também menciona que havia pensado em um recurso digital, porém, preferia usar a balança física, porque os alunos teriam uma experiência mais real.

Como o trecho da discussão desse grupo ficou restrita ao excerto, não pudemos identificar outros conhecimentos, porém, quanto às OAP, compreendemos que, quando LC2 fala que havia pensado em utilizar recursos digitais, supomos que levou o grupo a pensar ou refletir sobre isso, o que entendemos estar relacionado ao que Ribeiro e Ponte (2020, p. 16) ressaltam sobre a comunicação dialógica como uma das potencialidades das IDP.

Com relação do grupo G2, apresentamos como amostra o excerto G2 [75-80]:

75 LC4: *"Que recursos físicos ou digitais você usaria para ensinar essa tarefa?"*

76 LC6: *"Físico? No caso, seria papel ou aquela balança, poderia usar, não é? Aquela balança ali? Ou, no caso, se for digital o bom e velho projetor, é, no caso, para a aula presencial. Eu só consigo pensar no projetor digital. Físico é mais fácil? Porque dá para usarmos com qualquer coisa e colocar em equilíbrio. Com alguma coisa que alimente de um lado e alimente de outro. Pode ser qualquer coisa, não é?*

77 LC4: *"Pensa aí, tem que dar algumas sugestões, não é? Projetor é?*

78 LC5: *"É."*

79 LC6: *"Eu só penso assim, em usar uma balança mesmo, agora, digital, deixa eu ver digital, ou físico, papel ou uma balança e digital."*

80 LC4: *"Mas papel e balança? E/ou, não é? Porque você pode ter as 2 coisas ao mesmo tempo, não é? O papel e a balança, pois, quando você coloca o ou, ele é exclusivo.*

Verificamos indícios de conhecimento KMT1 revelados pelos licenciandos, inclusive na linha 79, quando LC6 citou a balança digital, pois sabemos que a balança física é um instrumento praticamente obsoleto no nosso cotidiano, porém muito utilizada em tarefas nos livros didáticos.

Com relação aos aplicativos para celulares e computadores, que estariam dentro da classificação de "recursos digitais", verificamos que a licencianda LC4 diz não conhecer sobre recursos, como jogos digitais, que trabalham com o tema contido na tarefa matemática do tipo analisada, conforme excerto G2 [92-95]:

92 LC4: *"Digital...qual? Não sei se existem jogos digitais que trabalham com isso. Eu nunca vi".*

93 LC6: *"Existem sim, há umas balanças que aparecem, e a pessoa vai colocando os pesos digitais como se fosse uma balança física na tela do computador. No caso aqui, é o recurso que usaria para ensinar, não é? O*

*projetor é um recurso, a internet é outro recurso, o quadro, o piloto, é mais ou menos isso, entendeu?*

94 LC4: *"Então, mas a ideia do corpo pode, porque você pode usar o corpo para uma atividade junto com os alunos. Você vai ensinando e eles vão praticando."*

95 LC6: *"Foi sim, sim a gente concordou com isso."*

Verificamos que LC6 indica existirem recursos, pois descreve um tipo de aplicativo de computador, embora não tenha mencionado especificadamente, portanto, identificamos, indícios de conhecimento KMT1 revelado pelo licenciando.

O conhecimento de recursos digitais é muito relevante para ser desenvolvido pelos futuros professores, pois a sociedade atual está se transformando numa sociedade virtual, requerendo cada dia mais o uso de aplicativos para as mais diversas tarefas, inclusive, as tarefas escolares.

Como exemplo de aplicativo em que podem ser trabalhadas as propriedades da igualdade, encontramos o Explorador Básico de Igualdade (EBI), indicado na pesquisa de Oliveira, Almeida e Espíndola (2021), os quais identificaram vários tipos de tarefas que remetem às relações de igualdade e aos princípios de equivalência com o uso desse recurso virtual que simula uma balança de dois pratos.

Continuando a análise do excerto G2 [92-95], a licencianda LC4 também revela indícios de KMT1, conforme linha 94, quando relembra que havia mencionado (nas IDP do grupo) que poderia utilizar o corpo como uma balança para promover atividades com os alunos, a mesma fala que ela reitera nas IDP da plenária, quando o professor formador discute sobre o item "d" da TAP, de acordo com o excerto PL [54-59]:

54 PF: *"Então vocês sugeriram que um dos materiais seria a balança de dois pratos?"*

55 LC4: "*Sim. Para mim, uma coisa que eu sugeri, também, era balança humana. Afinal de contas somos uma balança. Nós identificamos quando um lado do braço está mais pesado que o outro. Eu estava falando para L6 que, quando saímos do supermercado, se tivermos duas sacolas, sabemos qual sacola está pesando mais, entendeu? Se você tirar um objeto de uma sacola você vai saber*."

56 LC2: "*Só não percebe se a diferença for pequena*."

57 LC4: "*Então, mas, se você estiver com um quilo de um lado e 2 kg do outro você percebe*."

58 LC2: "*Aí você percebe, mas se a diferença for umas 10 ou 20 gramas, você não tem como perceber*."

59 LC4: "*Então, teria que trabalhar com objetos mais pesados. Minha sugestão seria usar balanças e objetos para pesar, e os pesos, porque você pode colocar pesos iguais, pesos diferentes*."

Identificamos, pois, na análise desse item da TAP, que os licenciandos revelam os conhecimentos KoT e KMT, segundo a perspectiva de Carrillo *et al*. (2014), e que as IDP também contribuíram para a aprendizagem dos futuros professores quando eles sugerem os recursos que trabalhariam com o conteúdo abordado na tarefa matemática.

Porém, identificamos que apenas dois dos licenciandos conhecem aplicativos digitais para o ensino das propriedades da igualdade e, isso, na nossa compreensão, trata-se de uma lacuna a ser resolvida, devido ao estágio atual que sociedade contemporânea vive, inclusive com os acontecimentos e sequelas dos últimos dois anos, dos quais ainda estamos passando, que foi a pandemia da Covid 19, quando as aulas passaram a ser síncronas e demandou dos docentes o conhecimento de recursos virtuais.

### 5.2.6 Item "e" da TAP

No item "e" da TAP, em que questionamos "Quais conceitos você identificou que a tarefa aborda?", trouxemos como amostra do grupo G1 o excerto G1[66-69]:

| | |
|---|---|
| 66 | LC2 *Quais os conceitos que você identificou que a tarefa aborda? Conceito seria a álgebra, equação de primeiro grau e assunto de álgebra.* |
| 67 | LC3: *Álgebra podemos trabalhar e falamos de equação e combinatória.* |
| 68 | LC1: *Introdução à combinatória, mas quais os conceitos que a tarefa aborda?* |
| 69 | LC3: *A questão de grandeza, quilos, proporcionalidade, unidade de medidas ou medidas de grandeza*. |

Nessa interação discursiva do grupo 1, verificamos que os licenciandos revelam indícios de alguns conhecimentos sobre conteúdos e conceitos matemáticos que a tarefa matemática aborda, como por exemplo, a noção de equivalência, mas nenhum menciona, conforme o excerto G1[66-69] acima, especificamente, esse conceito.

Ressaltamos que o conceito de equivalência da igualdade é uma das chaves para o entendimento da equação polinomial do 1º grau, como a BNCC propõe.

Com relação ao grupo G2, temos como amostra o excerto G2[99-112]:

| | |
|---|---|
| 99 | LC4: *"Quais conceitos você identificou que a tarefa aborda? Bom, nós falamos sobre grandezas e medidas, álgebra, ordem dos números naturais, operações".* |
| 100 | LC5: *"As 4 operações básicas".* |
| 101 | LC4: *"Mas o quê? Essa é a letra 'e', né? Não, não usou as 4 operações básicas, usou algumas."* |
| 102 | LC5: *"Mas não usou? Subtração, soma, divisão?"* |
| 103 | LC4: *"É, eu vou botar ordem dos números naturais também, 'maior que', 'menor que', deixa eu ver aqui, grandezas e medidas, é peso? Não? qual é essa medida?"* |

104 LC6: *"Massa? O certo seria falar massa, certo? Porque com peso, íamos calcular o valor da área, não é? Mas realmente...*"

105 LC4: *"Grandezas e medidas, qual é a área?"*

106 LC5: *"É massa, 8 kg é massa. 8 kg não é peso, não, até uma questão de interpretação porque peso já mexe com o conceito de gravidade, não é? Peso é uma força que já é assunto de Física, mas vamos considerar, não é?"*

107 LC4: *"Então, eu incluí massa, e a outra é álgebra, equação.*"

108 LC6: *"Tem um pouco de lógica também. Quando ele fala que tira um, o que acontece com a balança? Um prato sobe, outro desce."*

109 LC4: *"Noções de lógica."*

110 LC6: *"É, pelo menos um pouquinho de lógica aparece, não é?*

111 LC4: *"Noções de lógica, mais alguma coisa? O que é que vocês acham? Eu acho que é isso. Alguma coisa mais? E você, LC6?*

112 LC6: "*Eu acho que não consigo identificar mais nada."*

Da mesma forma que G1, no grupo 2(G2) identificamos que os licenciandos possuem conhecimento KoT1 com relação a conceitos, definições e KMT2, que trata do conhecimento sobre tarefas e atividades que se relacionam com determinados conteúdos, e em particular, com as propriedades da igualdade.

Por exemplo, LC5 fez a distinção entre massa e peso, indicando conhecimentos de termos e conceitos da Física; LC6 citou a lógica matemática; LC4, o conceito de "maior que", "menor que", o que revela que fazem conexões com outros conteúdos matemáticos (KSM), porém, também não mencionaram o conceito de equivalência, que, conforme já mencionamos é um conceito relevante para ser trabalhado com os alunos que esses futuros professores ensinam e ensinarão.

Nesses dois episódios, compreendemos que as IDP também promoveram oportunidades de aprendizagem aos futuros professores, porque as discussões mostram a diversidade de conhecimento que um vai expondo ao outro, sendo discutidas as questões com reflexão e que vão se transformando numa síntese que o grupo entende como a mais pertinente e consistente.

Na plenária, observamos que a pergunta feita pelo PF foi relevante para que houvesse aprendizagem ou transformasse a visão que os licenciandos tinham do conceito que estava por trás da tarefa. Como podemos ver no excerto PL [151-158]:

151 PF: *"Vocês estavam com a ideia de trabalhar a tarefa no sexto ano, que ajudaria na compreensão do conceito de equação. Então, eu queria ser mais direto: vocês acham que se trabalhasse, por exemplo, no sexto ano, uma tarefa igual a essa aqui, ajudaria os alunos quando chegassem no sétimo ano a compreender melhor a ideia de equação? Por quê?"*

152 LC4: "Sim."

153 LC3: "Sim."

154 LC2: *"Porque eles teriam um primeiro contato com valores que ainda não conhecem. O aluno usaria uma estratégia manipulando, como retirar um peso de 2 kg, retirava outros 2 kg, retirava um pote de doce de um lado e outro pote de doce do outro lado, e conseguia encontrar o valor do peso unitário de cada pote. Ele usaria essa estratégia para obter a resposta.*

*Ajudaria muito o aluno a entender o que fazer quando não se tem um valor determinado, como no caso dos potes de doce. O que fazer para poder obter esse valor.”*

155 LC3: *“E veria na prática o que acontece com o desequilíbrio, porque às vezes, por exemplo, se dissermos que tiramos de um lado, mas não houver uma balança representando que iria desequilibrar, acho que fica difícil de entender. Essa ideia de visualizar o problema com uma balança ajuda muito.”*

156 LC2: *“Uma das maiores dificuldades dos meninos do sétimo ano quando a vamos introduzir equação, é a questão do porquê da mudança de sinal quando vai para o outro lado. O que que faz mudar de sinal, o que que faz mudar a operação, o que é isso de jogar para o outro lado. Eles têm dificuldade em entender isso, e quando eles entendem essa questão, se é uma igualdade, se é uma balança que tem as mesmas quantidades, se eu tirar só de um lado ele vai deixar de ser igual. Aí, eles vão começar a assimilar essa questão. Se eu tirei daqui e tirei dali, se aqui tinha mais e aqui ficou menos, aí eles vão conseguir entender essa passagem.”*

157 LC1: *“Verdade. Ele não visualiza que tem o equilíbrio em uma balança, ele visualiza só que foi tirado do outro lado.”*

158 LC4: *“Dependendo do livro que o professor aborda na escola. Como eu tenho contato com aluno de escola particular, o ano passado quando ensinei um menino do sétimo ano, eu vi que o livro dele abordava exatamente você somar, subtrair, dividir ambos os lados. Entendeu? Subtrai dos 2 lados o valor, aí um lado vai dar 0. Um número menos outro, e do outro lado vai ser adicionado aquele valor. Então os livros e como professor da escola dele aborda é da forma que abordamos na universidade. Já na escola pública, geralmente, é esse negócio, usa só o livro, e o livro aborda até a forma de jogar para outro lado. Eu aprendi assim na escola. Eu não vou negar. Eu aprendi a história de jogar para o outro lado. Aí, depois, quando, eu sempre tento entender a lógica do que está acontecendo ali, então vou ficar identificando por que acontece isso, tal coisa, mas o aluno, a maioria dos alunos, principalmente quem tem dificuldade em matemática, não vai procurar o porquê daquilo que está acontecendo.”*

Nesse excerto, compreendemos que o conceito de equação, que é um dos principais abordados na tarefa matemática, vai ficando mais claro com a intervenção do PF, corroborando, assim, as ideias de Barboza, Pazuch e Ribeiro (2021) quando verificaram a importância do papel do professor formador na mediação em um processo formativo.

Identificamos que os licenciandos passam a ter uma ideia mais nítida de que o tipo de tarefa utilizada pode ser trabalhada com estudantes do 6º ano do EF, a fim de ser construído o conceito futuro de equação, bem como de serem usadas as propriedades da igualdade para resolução da tarefa com uma compreensão mais completa do conceito em oposição às técnicas mencionadas pela licencianda LC4 na linha 158, que ainda constam em muitos livros didáticos como única forma de resolução, como aponta Teles (2002) na sua pesquisa, e também fazem parte do repertório de técnicas de ensino de alguns professores.

Observamos também que, nesse excerto, LC2 demonstra indícios de conhecimentos sobre possíveis estratégias utilizadas pelos alunos (KMT/KFLM) se a tarefa fosse trabalhada no 6º ano do EF (KMLS) para encontrar o termo desconhecido (KoT).

LC3 mostra indícios de conhecimentos sobre a noção de equilíbrio (KoT), ressalta a importância da metáfora da balança para ajudar o raciocínio do aluno (KFLM) e da tarefa utilizando figuras para visualização do problema (KMT), enfatizando as ideias de Lessa (2005) e Azevedo (2021) sobre o uso da metáfora da balança de dois pratos como instrumento eficaz para a compreensão do sentido de igualdade em equações polinomiais do 1º grau.

LC2 demonstra que conhece um dos problemas cruciais na resolução de equações polinomiais do 1º grau, apontado na pesquisa de Teles (2002), relacionado com a mudança entre um membro e o outro da equação, constatado como uma das dificuldades da maioria dos estudantes (KFLM) em entender esse procedimento (KoT).

A licencianda LC4 demonstra indícios de conhecimento no KMT (sobre recursos, livros), procedimentos (KoT), e explana como esses recursos são importantes para o ensino e a aprendizagem.

A licencianda LC4 cita a experiência de ter aprendido, quando cursava o ensino fundamental, apenas a técnica de mudança de sinal para resolução da equação polinomial do 1º grau, corroborando aquilo que Garcia (1995) indica sobre a formação do professor vir desde antes da graduação e que os licenciandos trazem conhecimentos e procedimentos que, se assimilados acriticamente, podem influenciar inconscientemente a prática futura docente.

No excerto da plenária, PL[151-158], compreendemos que as IDP são potenciais instrumentos que "favoreceram a comunicação dialógica entre todos os professores, e entre estes e o formador, assim como possibilitaram a ocorrência de discussões matemáticas e didáticas de forma articulada" (RIBEIRO; PONTE, 2020, p. 16).

### 5.2.7 Item "f" da TAP

No item "f" da TAP, último item em que solicitamos: "Indique uma tarefa que você trabalharia com os alunos após executar a tarefa da balança.", trouxemos como amostra do grupo G1, o excerto G1[70-74]:

70 LC1: "*Indique uma tarefa que você trabalharia com os alunos após executar essa tarefa da balança.*"

71 LC3: "*Procurar em sua casa, na área de mantimentos, os pacotes que você tem fechado em sua casa, estimar um peso e fazer as equivalências.*"

72 LC2: "*Fazer a balança provavelmente. Mesmo sem ter balança, porque os potes já vêm com a indicação da quantidade, tantas gramas*."

73 LC1: "*Verificar as unidades de quilograma, grama, para trabalhar também sistema de medidas, decimais. Temos que ver essas questões também, da medida, e, pensando na equivalência, poderia fazer da seguinte forma: em um*

*pacote de feijão de 1 kg equivalente a três latinhas de milho em conserva, fazer esse tipo de comparação."*

74 LC2: "*E, aí, seria mais um exercício de casa para fixar a ideia do que foi visto em aula."*

Nesse excerto, podemos observar que, mesmo antes da plenária, os licenciandos já estavam delineando a ideia de que a tarefa buscava explorar o conceito de equivalência, pelo que, além de identificarmos os conhecimentos KoT1 (termos matemáticos) e KMTS (tarefas, recursos, atividades), compreendemos que as interações e discussões sobre os itens anteriores da TAP, ou seja, as IDP que ocorreram nos grupos, favoreceram o aprofundamento do conhecimento profissional dos integrantes, conforme a perspectiva de Ribeiro e Ponte (2020, p.6), como vimos na discussão do último item, em que o conceito de equivalência, que a TM buscava explorar, começou a ser entendida.

Do grupo G2, apresentamos o excerto G2 [118-127]:

118 LC4: *"Acho que seria mais uma tarefa básica para os alunos fazerem sozinhos, do fundamental, porque senão, iria sair do sétimo ano para o nono ano, Ensino Médio, igual a gente estava falando se fosse para fazer 2 pesos diferentes, iria para o Ensino Médio. É exatamente isso, tem que ser algo pensado no mesmo grau."*

119 LC5: *"Poderia fazer uma continuação com essa tarefa aí para os alunos."*

120 LC6: *"Eu só penso assim, mas na parte de álgebra."*

121 LC4*: "Bom, é porque é uma coisa que é apresentada na hora, mas você poderia indicar que os alunos construíssem algo... Ou que os alunos arrumassem outra forma de pesar que não fosse uma balança de dois pratos*."

122 LC5: *"Uma balança humana?"*

123 LC4: *"Não, que não fosse uma balança de 2 pratos, uma balança humana é uma balança de 2 pratos."*

124 LC5: *"Ah sim!"*

125 LC4*: "É, por exemplo, eles iriam pegar outra balança, e pegar os pesos que dessem quantidades iguais, sabe? Como eles só poderiam fazer a tarefa se tivessem uma balança, o professor poderia disponibilizar uma balança diferente, no caso, sei lá, uma balança com peso único, e eu gosto muito desse negócio dos alunos criarem pesos... Por exemplo, o aluno criaria um peso, e, nisso, ele faria o experimento na balança. Ele criaria um peso e, ali, estaria, por exemplo, em vez de o professor colocar tudo de 1 kg, colocaria 10 kg, aí ficariam 2 pesos de 3 kg. Eu teria um peso de 1 kg, outro de 2 kg assim, pesos diversificados."*

126 LC5: *"Como essa questão que fizemos?"*

127 LC4: *"É, pesos diferentes, mas pesos que eles mesmos criassem. Assim: cada aluno criaria um peso diferente. Eu adoro esse negócio dos alunos criarem, porque eles pensam na matemática, eles problematizam para eles mesmos. Porque, por exemplo, se ele tiver em uma balança de peso único e uma sacola com os objetos dentro e descobrir que deu 11 kg, ele vai ter que ir lá na balança de 2 pratos, uma balança normal, ele vai ter que colocar esse peso, para achar e, aí, pode fazer o teste da balança com 2 pratos. 11 kg é um número ímpar, então, não manteria o equilíbrio, entendeu? Então,*

> *se ele pensasse que poderia ir lá e colocar os objetos divididos. Do peso que ele encontrou. Por exemplo, encontrou os 11 kg, aí, foi lá e colocou os objetos que deram 11 kg, retiraria daquela balança de peso único e colocaria na balança de 2 pesos os objetos divididos em cada prato. O que que aconteceria na balança de 2 pesos? Se fosse um número ímpar?"*

Nesse excerto, identificamos que os licenciandos revelaram conhecimento KoT1 (termos matemáticos), conhecimento KMLS (padrões e níveis de ensino), pois a LC4 cita que o item "f", solicitado para reflexão, refere-se ao nível de ensino que o grupo já havia discutido antes, indicando como o 6º e o 7º anos.

Também, ressaltamos que LC4 imaginou uma atividade em que os alunos criassem os pesos, havendo a licencianda expressado que, quando os próprios alunos constroem objetos, eles pensam a matemática, ou seja, identificamos que LC4 revela conhecimento de atividades, tarefas, exemplos, ajudas que se encontra dentro do domínio KMT2, de acordo com a classificação dos subdomínios em Carrillo *et al*. (2014).

Com relação às discussões sobre o item "f" na plenária, os licenciandos só reproduziram o que haviam discutido nos grupos, porém, o professor formador lançou uma questão diferente, que no nosso entendimento é crucial para o ensino da igualdade e das suas propriedades, executando, assim, o que Ribeiro e Ponte (2020, p. 6) indicam como uma das dimensões do papel do formador nas articulações das IDP: "orquestração de discussões didáticas e matemáticas ao se pensar a aprendizagem de professores", conforme excerto PL [111-117]:

> 111 PF: *"A ideia de igualdade foi comentada muito por vocês tanto em um grupo quanto no outro. Se um aluno lá do Ensino Fundamental perguntasse para vocês, vocês dando aula: o que é uma igualdade? O que significa igualdade? O que vocês responderiam?"*

> 112 LC6: *"É um equilíbrio, pode-se dizer, usando esse mesmo raciocínio da balança, dizer que é um equilibro, feito ele citou também. Se tirar de um lado desequilibra, fica mais pesado que o outro. Considerando que 10=10, se eu somar só de um lado, desequilibraria. Dizer que a igualdade é um equilíbrio, no caso, é mesmo que dizer: isso equivale a isso, e esse está equilibrado."*

Identificamos, por meio dessa questão levantada pelo PF no final da plenária, que o licenciando LC6 revelou o conhecimento KoT1 (a noção de equivalência e a comparação com a noção de equilíbrio), enfatizando o que Lessa (2005) entende como compreensões necessárias para construção do conhecimento em álgebra.

Diante da análise que fizemos, compreendemos que houve indícios de que a aprendizagem profissional dos futuros professores sobre a igualdade e suas propriedades foi modificada pelas IDP que ocorreram nos grupos e na plenária, mediadas pela TAP e pelo professor formador (PF), pois trouxeram mais profundidade ao seu conhecimento.

Verificamos, portanto, as potencialidades da TAP, nas dimensões operacionais caracterizadas por Ribeiro e Ponte (2020), ao observar que os itens discutidos proporcionaram aos futuros professores reflexões sobre uma tarefa matemática para estudantes do 6º ano do EF, em que foram inseridos registros de prática, os quais envolviam conteúdos matemáticos e didáticos relacionados às propriedades da igualdade.

Também, são evidenciadas as dimensões conceituais da TAP, indicadas por Ribeiro e Ponte (2020), quando foi sugerido aos professores buscarem, nos seus conhecimentos profissionais, justificação para suas respostas, as quais acarretaram discussões e reflexões dos participantes em torno dos itens da tarefa, cujas ações entendemos se encontrarem no âmbito do ensino exploratório.

Identificamos, portanto, as TAP como instrumentos eficazes para promover oportunidades de aprendizagem profissional aos licenciandos, os quais demonstraram expandirem seus conhecimentos ao discutirem os itens propostos, analisando obstáculos sobre a formulação da tarefa, comparando níveis de ensino em que a tarefa poderia ser aplicada, procurando entender, interpretar e justificar os erros dos alunos, fazendo conexões entre os conteúdos matemáticos, citando e trocando experiências de práticas de ensino, dentre outras situações observadas nos excertos apresentados.

Assim, chegamos ao final da análise e da discussão dos dados obtidos no processo formativo, passamos à conclusão.

## 6. CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nossa pesquisa buscou compreender os conhecimentos de futuros professores sobre as propriedades da igualdade, a fim de responder à questão: que conhecimentos matemáticos e didáticos os futuros professores de matemática evidenciam e desenvolvem sobre a igualdade e suas propriedades, para o ensino do 6º ano do Ensino Fundamental, durante um processo formativo mediado por uma Tarefa de Aprendizagem Profissional?

Verificamos que o ensino das propriedades da igualdade na educação básica, e em particular no 6º ano do Ensino Fundamental, demanda o aprimoramento dos conhecimentos profissionais dos futuros professores de matemática em vista da polissemia que há no significado do símbolo de igual (MIRANDA, 2019; SPIELMANN, 2019).

Da mesma forma, também entendemos a necessidade de aperfeiçoamento dos conhecimentos docentes em vista dos vários significados e contextos em que o sinal de igual pode ser empregado (TRIVILIN; RIBEIRO, 2015; MOLINA, 2006) e dos resultados de pesquisas que indicam que estudantes do ensino fundamental, do ensino médio e do superior têm a tendência de compreender o sinal de igualdade apenas no sentido operacional, que denota que deva "ser feita uma conta", "achar um resultado" ou "um lugar" para se colocar depois a resposta em detrimento de outros sentidos, como, por exemplo, a equivalência (KIERAN, 1981; BANDARRA, 2011; CAVALCANTI, 2008; BARBOSA; PAZUCH; RIBEIRO, 2021).

Observamos na literatura, também, a necessidade de aprimoramento do conhecimento do futuro docente de matemática sobre: história, evolução e concepções da álgebra (COELHO; AGUIAR, 2018; BRASIL, 1998); pensamento algébrico (ALMEIDA, 2016; FIORENTINI; FERNANDES; CRISTÓVÃO, 2005), tipos de tarefas (BRANCO; PONTE; MATOS, 2009), recursos físicos e digitais (LESSA, 2005; OLIVEIRA; ALMEIDA; ESPÍNDOLA, 2021), características da aprendizagem dos estudantes com referência aos erros e obstáculos (KIERAN, 1981; TELES, 2022) e sobre os padrões e níveis de aprendizagem dos alunos (BRASIL, 2018), devido a esses conhecimentos serem elementos cruciais para o desenvolvimento da profissão docente (SANTANA; SERRAZINA; NUNES, 2019; PONTE, 1999).

Ressaltamos que, devido às mudanças curriculares propostas pela BNCC (BRASIL, 2018), as propriedades da igualdade aparecem como tema recorrente para a aprendizagem da álgebra nos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental (do 3º ao 7º ano), demandando, por isso, que o professor ou o futuro professor busque o preparo necessário para lidar com essa realidade.

Portanto, para alcançar o primeiro objetivo específico, e responder à indagação “Que conhecimentos prévios os futuros professores trazem para a formação inicial sobre a matemática, sobre a álgebra, sobre a igualdade e suas propriedades, e sobre os documentos curriculares oficiais?”, aplicamos um questionário com a finalidade de identificar os conhecimentos dos licenciandos e com o intuito de usar os dados desse instrumento para a construção da Tarefa de Aprendizagem Profissional (TAP), havendo sido constatadas algumas lacunas nos conhecimentos dos futuros docentes como, por exemplo: pouca familiaridade com os documentos curriculares oficiais (BRASIL, 2018) e a tendência de compreensão do sinal de igualdade apenas como um símbolo que indica o lugar da resposta (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

Nessa trilha, para responder à segunda questão “Quais conhecimentos profissionais são evidenciados por futuros professores de matemática sobre o conteúdo, a aprendizagem dos alunos, o ensino do conteúdo e os parâmetros de aprendizagem das propriedades da igualdade para o 6º ano do Ensino Fundamental?”, utilizamos as categorias dos subdomínios do MTSK, idealizado por Carrillo et al. (2014), para construir os itens da TAP, a fim de identificar os conhecimentos matemáticos e didáticos dos futuros professores de matemática quanto ao ensino das propriedades da igualdade.

Assim, na análise dos dados, identificamos que os futuros professores revelam conhecimento do conteúdo (KoT), mas observamos que eles possuem uma só visão da álgebra (concepção letrista) e pouca familiaridade com a noção do pensamento algébrico (ALMEIDA, 2017), ainda que manifestem as características desse modo de pensar; a maioria usa a técnica das operações inversas para resolver problemas que remetem à equação polinomial do 1º grau, e não fazem uso das propriedades da igualdade (BRASIL, 2018); apenas dois licenciandos utilizaram, formalmente, as propriedades da igualdade na resolução da tarefa matemática (TELES, 2002).

Também como resultados, verificamos que os licenciandos revelam conhecimento sobre as conexões com outros conteúdos interconceituais (KSM), com a prática matemática (KPM), e conseguem identificar os erros dos alunos e tentam justificar os equívocos na resolução de tarefas (KFLM).

Também inferimos que os futuros professores evidenciam o conhecimento do ensino do da matemática (KMT), em vista de constatarmos que eles demonstram conhecimento de recursos físicos (balança de dois pratos, por exemplo) e identificam a importância desses recursos para o ensino; porém, não conhecem muitos recursos digitais/virtuais para utilizarem na prática de ensino (OLIVEIRA; ALMEIDA; ESPÍNDOLA, 2021).

Identificamos ainda que, quanto ao conhecimento dos parâmetros de aprendizagem dos estudantes (KMLS) com relação às propriedades da igualdade, os licenciandos conseguem relacionar o tipo de tarefa com os níveis de ensino, mas mostraram pouca familiaridade com os documentos curriculares oficiais (BRASIL, 2018).

Com relação ao nosso terceiro objetivo específico, e para responder ao questionamento: “De que forma um processo formativo, mediado por uma Tarefa de Aprendizagem Profissional, promove o desenvolvimento profissional de futuros professores de matemática?”, utilizando o modelo PLOT (RIBEIRO; PONTE, 2020), promovemos um momento formativo mediado por uma Tarefa de Aprendizagem Profissional (TAP), com dupla finalidade: produzir os dados da pesquisa e criar oportunidades de aprendizagem profissional aos futuros professores de matemática.

Concluímos, portanto, que os futuros professores participantes, de uma forma geral, revelaram indícios dos subdomínios anteriormente mencionados e que, durante o percurso da formação, com as discussões em torno da TAP, aprimoraram o conhecimento profissional, o que corrobora as conclusões de Ribeiro e Ponte (2020), Ribeiro, Gibim e Alves (2021), e Aguiar e Ribeiro (2022).

Obtivemos, ainda, evidências das potencialidades do modelo PLOT quando vivenciamos esse modelo “em ação” no contexto de formação inicial de professores de matemática, com a integração e com as articulações dos três domínios (PAF, TAP e IDP), como propõem Ribeiro e Ponte (2020), demostrando a eficácia do modelo em ser um veículo para compreensão da aprendizagem de futuros professores e promoção de oportunidades de aprendizagem profissional, bem como na configuração de processos formativos.

Constatamos, também, as potencialidades das Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP) como mediadoras em processos formativos, pois evidenciaram provocar, nos futuros professores, reflexões e discussões acerca de conhecimentos matemáticos e didáticos sobre a igualdade e suas propriedades, e, consequentemente, gerar aprendizagem profissional docente quando os licenciandos discutiram e refletiram sobre os itens propostos, corroborando assim a utilização dessas tarefas como artefatos para promoção de aprendizagem e aprimoramento dos conhecimentos na formação inicial de professores de matemática (RIBEIRO; PONTE, 2020; AGUIAR; RIBEIRO, 2022).

Assim também, a TAP construída com elementos dos subdomínios do MTSK proporcionou a identificação dos conhecimentos profissionais dos futuros professores, conforme a análise que fizemos, em que é demonstrada a ampliação dos conhecimentos profissionais dos futuros professores participantes, corroborando as ideias de Moriel Júnior e Wielewski (2021).

Destacamos, ainda, a importância do papel mediador do professor formador (PF) na construção do processo formativo e na condução das interações discursivas (IDP), pois o PF é um dos agentes principais para provocar as reflexões que emergem da troca de experiências e das contribuições dos participantes, de modo que se concretize a aprendizagem profissional (RIBEIRO; PONTE, 2020).

Da mesma forma, compreendemos que as discussões (as IDP) entre os grupos e na plenária demostraram que são instrumentos potenciais para descreverem os conhecimentos profissionais e promoverem o aprendizado dos futuros professores, conforme visto nos episódios utilizados como amostras, corroborando as ideias de Ribeiro e Ponte (2020).

Comparando o que vimos na literatura com o momento formativo, enfatizamos a necessidade de que sejam promovidas mais ações que intervenham na formação inicial, com a finalidade de oportunizar o aprendizado dos futuros docentes, como por exemplo, por meio de cursos, de minicursos, de processos formativos nos moldes desta pesquisa, visando favorecer, assim, uma ampliação e um aprofundamento do conhecimento matemático e didático dos licenciandos, o que, consequentemente, resultará em desenvolvimento profissional, e também com a intenção de aproximar mais a matemática aprendida na universidade com a matemática ensinada na escola básica (RIBEIRO, 2019).

Para futuros trabalhos, sugerimos que sejam investigadas as outras dimensões do desenvolvimento profissional indicadas por Richt (2021), a saber, as dimensões da cultura profissional, da dimensão ética da docência e da mudança na prática, em vista de havermos fundamentado nossa pesquisa apenas em duas dimensões: o conhecimento e a aprendizagem profissional docente.

Por fim, propomos que sejam investigadas as ações do formador devido ao nosso trabalho não ter alcançado essa análise e em vista de o professor formador ser elemento relevante nas ações que promovem oportunidades de aprendizagem profissional (OAP).

## 7. REFERÊNCIAS

AGUIAR, M.; DONÁ, E.; JARDIM, V.; RIBEIRO, A. J. Oportunidades de aprendizagem vivenciadas por professores de matemática: desvelando as ações e o papel do formador durante um processo formativo. **Acta Scientiae** (Canoas), 23(4), 112-140, Jul./Aug. 2021. 10.17648/acta.scientiae.6575., 2021.

AGUIAR, M.; RIBEIRO, A. J. Oportunidades de aprendizagem vivenciadas por professores de matemática: experiências advindas de um processo formativo ancorado na prática docente. Paradigma, [S. l.], v. 43, n. 1, p. 273-296, 2022. DOI: 10.37618/**Paradigma**.1011-2251.2022.p.273-296.id1172. Disponível em: http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/article/view/1172. Acesso em: 20 out. 2022.

ALBUQUERQUE, C. *et al*. A matemática na formação inicial de professores. Lisboa: **APM e Secção de Educação e Matemática da SPCE**. 2006. Disponível em http://www.apm.pt/files/_90-95_lq_45d9e33dcb34b.pdf. Acesso em: 12 dez. 2021.

ALBUQUERQUE, L.; GONTIJO, C. A complexidade da formação do professor de matemática e suas implicações para a prática docente. **Revista Espaço Pedagógico**, v. 20, n. 1, 4 out. 2013

ALMEIDA, J. R. **Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico**: proposição de um modelo para os problemas de partilha de quantidade. 202 f. Tese (Doutorado em Ensino das Ciências e Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências, Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife, 2016.

ALMEIDA, J.R. Álgebra Escolar na Contemporaneidade: uma discussão necessária. **EM TEIA** – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana – vol. 8 - número 1 – 2017

ALMEIDA, J. R. Características do pensamento algébrico reveladas por estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental na resolução de um problema de partilha. **Revista Eletrônica Científica Ensino Interdisciplinar**. Mossoró, v. 4, n. 12, 2018.

ALMEIDA, J. R.; CÂMARA, M. Pensamento algébrico: em busca de uma definição. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 6, n. 10, p.34-60, jan./jun. 2017. Disponível em: http://rpem.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/1124. Acesso em: 14 ago. 2018.

ALMEIDA, M. V. R.; RIBEIRO, M.; FIORENTINI, D. Mathematical Specialized Knowledge of a Mathematics Teacher Educator for Teaching Divisibility. **PNA**. **Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática**, v. 15, n. 3, p. 187-210, 2021.

ARCAVI, A. Symbol Sense: Informal Sense- making in Formal Mathematics. **For the Learning of Mathematics**, Vancouver, v. 14, n. 3, p. 24-35. Noviembre. 1994.

ARCAVI, A. El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. Conferencia realizada como Profesor visitante, **CRICED**, Tsukuba University- Japan. 2007. Disponible en:

http://ebookbrowse.com/arcavi05-el-desarrollo-y-el-uso-del-sentido-de-los-simbolos-docd37871752. Acesso em: 13 mai. 2021.

ARIAS, C.J.L.; MENDIETA, L.C.M.; DIAZ, J.A.T. **Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos. Clasificar, medir e invertir**. 2ª. ed. – Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional, 2014, 509 p.

AZEVEDO, G. V. **Construção de significados na transição escolar para o 6º ano do Ensino Fundamental**. 188 f. Tese (Doutorado em Psicologia Cognitiva) - Programa de Pós-graduação em Psicologia Cognitiva, Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2017.

BADARÓ, J. N. **Significados do Símbolo de Igualdade numa Jornada por Três Mundos da Matemática**. 124 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) **-** Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2010.

BALL, D. L.; COHEN, D. K. **Developing practice, developing practitioners**: Toward a practice-based theory of professional education. In: Sykes, G.; Darling-Hammond, L. (Eds.). Teaching as the learning profession: Handbook of policy and practice. San Francisco, CA: Jossey Bass, p. 3-32. 1999.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? **Journal of Teacher Education**, 2008: 59: 389. Disponível em: http://jte.sagepub.com/cgi/content/abstract/59/5/389. Acesso 3 out.2020.

BANDARRA, L. O sinal de igual: um estudo vertical. In: ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, Póvoa do Varzim. **Actas**... Póvoa do Varzim, 2011. p. 305-322. Disponível em:. http://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/algebra/eiem Acesso em: 14 mar. 2021.

BARBOSA, C.P.; LOPES, C.E. Colaboração e desenvolvimento profissional de futuros professores de matemática: uma experiência no estágio curricular supervisionado. **Sisyphus Journal of Education**. Volume 9, issue 02, 2021, pp.61-83. Disponível em: https://doi.org/10.25749/sis.21678. Acesso em: 25 ago.2021.

BARBOZA, L. C. de S. **Conhecimentos dos professores dos anos iniciais e o sinal de igualdade**: uma investigação com tarefas de aprendizagem profissional. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do ABC, Programa de Pós-Graduação em Ensino, História e Filosofia das Ciências e Matemática. Santo André, 2019.

BARBOZA, L. C. de S.; PAZUCH, V.; RIBEIRO, A. J. Tarefas para a aprendizagem de professores que ensinam matemática nos anos iniciais. **Zetetikê,** Campinas, SP, v. 29, 2021, p. 1–25. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8656716. Acesso em: 10 mai. 2021.

BAUMGART, J.K. **História da álgebra** - trad. Hygino H. Domingues. - São Paulo : Atual, 1992 - (Tópicos de História da matemática para uso em sala de aula ; v.4)

BERRINCHA, R.; SARAIVA, M. J. Das igualdades numéricas ao estudo das equações do 1. º grau. **Actas do XIX Encontro de Investigação em Educação Matemática: SPCE-SEM: Vila Real**, 2009.

BEZERRA, A. R. L. **Ensino da álgebra: uso da linguagem e do pensamento algébrico como ferramenta de aprendizagem na educação básica**. 61 f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Fundação Universidade Federal de Rondônia. Porto Velho, 2016.

BLANCO. M. M. G. Um olhar retrospectivo sobre a pesquisa brasileira em formação de professores de matemática. In: FIORENTINI, D. (Org.). **Formação de professores de matemática**: explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas, SP : Mercado de Letras, 2003.

BODGEN, R.C; BIKLEN, S.K. **Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL. Constituição (1988). **Constituição da República Federativa do Brasil**. Brasília, DF: Senado Federal: Centro Gráfico, 1988.

BRASIL. **Decreto-lei n.9394 de 20 de dezembro de 1996**. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. In: Diário Oficial da União, Brasília, seção 1, p.27839, 23 de dezembro de 1996.

BRASIL, **Plano Nacional de Educação - PNE**, de 25 de junho de 2014. Disponível em: http://pne.mec.gov.br/18-planos-subnacionais-de-educacao/543-plano-nacional-de-educacao-lei-n-13-005-2014. Acesso: 21 ago.2021.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 31 out. 2020.

BRASIL. CNE/CP nº 2/2019 - Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica (**BNC-Formação**), de 20 de dezembro de 2019. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=77781%
E2%80%9D. Acesso: 21 ago.2021.

CABANHA, D. D. S. C. **Conhecimento especializado de um formador de professores de matemática em início de carreira**: o ensino a distância de derivada. 201 f. Tese (Doutorado). Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2018.

CARRILLO, J. *et al*. **Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de Matemáticas**. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones, 2014.

CARRILLO, J. *et al*. The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. **Research in Mathematics Education**, v. 20, n. 3, p. 236-253, 2018.

CARRILLO, J.; MARTÍN, J. El conocimiento especializado del profesor de matemáticas como fruto del cambio. **Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas**, v. 100, p. 147-152, 2019.

CAVALCANTI, J.D.B. **Concepções de alunos do 3º ano do ensino médio sobre o significado do símbolo "=" em contextos aritméticos e algébricos**. 222 f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências e Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências, Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife, 2008.

CAVALCANTI, J. D. B.; SANTOS, M. C. Um estudo sobre compreensões do sinal de igualdade: noção operacional e relacional de equivalência. En Mancera, Eduardo; Pérez, César Augusto (Eds.), **Memorias XII CIAEM** (pp. 1-11). Querétaro, México: Edebé, 2007. Disponível em http://funes.uniandes.edu.co/4506/. Acesso em 11 ago.2021.

CAVALCANTI, J.D.B.; SANTOS, M.C. A saga do sinal de igualdade: mais de 450 anos de história. **Educação Matemática em Revista** - n. 25, p. 33-36, 2008.

CHAPARRO, D. M. M. **La igualdad y la letra desde la historia de las Matemáticas y libros de texto escolares**. 108 p. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá. D.C., 2017. Disponível em: http://hdl.handle.net/20.500.12209/7767. Acesso: 10 mai. 2021.

CLEMENTE, E. et al. El conocimiento matemático del profesor acerca de la parábola: diseño de un instrumento para investigación. **Uniciencia**, v. 35, n. 1, p. 190-209, 2021.

COELHO, F. U.; AGUIAR, M. **A história da álgebra e o pensamento algébrico: correlações com o ensino**. Estud. av., São Paulo , v. 32, n. 94, p. 171-187, Dec. 2018 . Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-40142018000300171&lng=en&nrm=iso. Acesso em 21 out. 2020.

COSME, V. V. **Igualdade Matemática**: um estudo de sua história e significados. 178 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação. Universidade Federal do Espírito Santo. Vitória, 2007.

CRUZ, P.F.S. **Pensamento algébrico e os significados do sinal de igualdade**: o uso da oralidade e da narrativa nas aulas de matemática. 115 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontífica Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2016.

CUNHA, M. I. O tema da formação de professores: trajetórias e tendências do campo na pesquisa e na ação. **Educ. Pesqui.**, São Paulo, n. 3, p. 609-625, jul./set. 2013. Disponível em https://doi.org/10.1590/S1517-97022013005000014. Acesso em 30 set. 2021.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática: Da teoria à prática**. 23. ed. Campinas: Papirus, 2012.

ESCUDERO, D. I.; FLORES, E.; CARRILLO, J. El Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas. **Actas** de la XV ESCUELA DE INVIERNO EN MATEMÁTICA EDUCATIVA, 15. ed., p. 35-42. México, 2012.

FERNANDEZ, J., OCHOVIET, C. Procedimientos Rituales en la Resolución de Ejercicios en Contexto Algebraico en Estudiantes de Profesorado de Matemática. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, vol. 29, núm. 52, 2015

FERREIRA, A.C. Um olhar retrospectivo sobre a pesquisa brasileira em formação de professores de matemática. In: FIORENTINI, D. (Org.). **Formação de professores de**

**matemática**: explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas, SP : Mercado de Letras, 2003.

FERREIRA, M. C. N.; RIBEIRO, M.; RIBEIRO, A. J. Conhecimento matemático para ensinar álgebra nos anos iniciais do ensino fundamental. **Zetetiké**, v. 25, n. 3, p. 496-514, 2017.

FIORENTINI, D.; CRECCI, V. Desenvolvimento Profissional Docente: um Termo Guarda-Chuva ou um novo sentido à formação? **Formação Docente** – Revista Brasileira de Pesquisa sobre Formação de Professores, Belo Horizonte, v. 05, n. 08, p. 11-23, jan./jun. 2013. Disponível em http://formacaodocente.autenticaeditora.com.br. Acesso em 29 abr. 2022.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTOVÃO, E. M. Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2005, Porto, Portugal. Anais... Lisboa: **APM**, 2005. v.1. p.1 – 13.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuições para um Repensar a Educação Algébrica Elementar. **Pro-Posições**. Campinas, SP, v. 4, n. 1, p. 78-91, mar. 1993.

FLORES, E.; ESCUDERO, D. I.; AGUILAR, A. Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. In: BERCIANO, A.; GUTIÉRREZ, G. et al. (Ed.). **Investigación en Educación Matemática XVII.** 17 ed. Bilbao, Espanha: SEIEM, v. 1, p. 275-282, 2013.

FOSSA, J.A. O status epistemológico do conhecimento matemático. **Conference Paper**. v. 4, n. 10, set. 2019. Disponível em: https://www. researchgate. net/publication/335682130. Acesso em 15 jun.2021.

FRANCO, L. G.; MUNFORD, D. Reflexões sobre a Base Nacional Comum Curricular: um olhar da área de Ciências da Natureza. **Horizontes**, v. 36, n. 1, p. 158-171, 2018.

GARCÍA, C. M. **Formação de professores: para uma mudança educativa**. Portugal: Porto Editora, 1999.

GARCÍA, C. M. Desenvolvimento Profissional Docente: passado e futuro. **Sísifo**. Revista de Ciências da Educação, 08, pp. 7-22, 2009. Disponível em http://sisifo.fpce.ul.pt. Acesso em 14 ago.2022.

GIL, A. C. **Método e técnicas de pesquisa social**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GONÇALVES, S.R.V.; MOTA, M.R.A.; ANADON, S.B. Resolução CNE/CP n. 2/2019 e os retrocessos na formação de professores. **Formação em Movimento**, v.2, i.2, n.4, p. 360-379, jul./dez. 2020369.

GROENWALD, C. L. O.; SILVA, C. K.; MORA, C. D. Perspectivas em Educação Matemática. **ActaScientiae**. Canoas/RS, v.6, n. 1, p. 37-55, jan/jun. 2004.

IREM . Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques Université d'Aix-Marseille. ***Enseigner la notion mathématique d'égalité Au collège***. Groupe Collège – IREM de Aix Marseille. Novembre 2017. Disponível em https://irem.univ-amu.fr/sites/irem.univ-amu.fr/files/public/brochure_21.pdf. Acesso em 3 jul. 2021.

LAUTENSCHLAGER, E.A; BALVIN, F. A. Desvelando indícios de conhecimento especializado dos futuros professores do rio grande do norte/brasil para o ensino da álgebra com o modelo MTKS. **V Congresso Iberoamericano de Conocimiento Especializado Del Profesor de Matemáticas**. 3 -5 novembro, online. Disponível em: https://cdn.congresse.me/sxmuargybtxs0iebaimczzwt46zi. Acesso em 5. dez 2021.

LAUTENSCHLAGER, E.; RIBEIRO, A. J. Reflexões acerca do impacto do conhecimento matemático dos professores no ensino: a álgebra da Educação Básica. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, 7(3), 2014.
LAUTESCHLAGER, E.; RIBEIRO, A. J. Formação de professores de matemática e o ensino de polinômios. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.19, n.2, 237-263, 2017. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/31453/pdf . Acesso em 23 Jun. 2022.

LESSA, M. M. L. **Aprender álgebra em sala de aula**: contribuição de uma sequência didática. Recife, 2005. 227 f. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva, Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2005.

LINS, R.C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI**. 4.ed. Capinas/SP : Papirus, 2001.

LITOLDO, B. F.; RIBEIRO, M.; MELLONE, M. Conhecimento especializado do formador de professores que ensinam matemática: primeiras reflexões sobre a álgebra e o pensamento algébrico. **CoInspiração** - Revista dos Professores que Ensinam Matemática, v. 1, n. 1, p. 1-20, 2018.

KIERAN, C. Concepts associated with the equality symbol. **Educational Studies of Mathematcs**. Dordercht, 1981.

MEDEIROS, M. Lógicas das competências: Perspectivas para o Currículo em Ação. **Revista Latinoamericana de Ciencias Sociales**, Niñez y Juventud, 14 (2), p. 1031-1040, jul./dez., 2016.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, M.A. Álgebra ou geometria: para onde pende o pêndulo? In: **Pro-Posições**, v. 3, nº 1(7): 39-54, 1992.

MIRANDA, D. R. **Significados do sinal de igualdade na Matemática**. 75 f. Dissertação de Mestrado. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2019.

MOLINA, M. **Desarrollo de Pensamiento Relacional y Comprensión del Signo igual por Alumnos de Tercero de Educación Primaria**. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada, 2006.

MONTES, M.A.; CONTRERAS, L.C.; CARRILLO, J. Conocimiento del profesor de matemáticas: enfoques del MKT y del MTSK. In: BERCIANO, A.; GUTIÉRREZ, G. **Investigación en Educación Matemática XVII Bilbao**. Espanha: SEIEM, 2013. p.403-410

MORIEL-JUNIOR, J. G., CARRILLO, J. Explorando indícios de conhecimento especializado para ensinar matemática com o modelo MTSK. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), **Investigación en Educación Matemática XVIII** (pp. 465-474). Salamanca: SEIEM, set. 2014. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/272179007. Acesso em: 30 out. 2020.

MORIEL JUNIOR, J. G.; DUARTE, E. B. Global production landscape about Mathematics Teacher's Specialized Knowledge at Google Scholar until 2019. **Research, Society and Development**, *[S. l.]*, v. 9, n. 11, p. e71191110526, 2020. DOI: 10.33448/rsd-v9i11.10526. Disponível em: https://rsdjournal.org/index.php/rsd/article/view/10526. Acesso em: 17 ago. 2021.

MORIEL-JUNIOR, J. G.; WIELEWSKI, G. Base de conhecimento de professores de matemática: do genérico ao especializado. **Revista de Ensino, Educação e Ciências Humanas**. 2. 126-133. 10.6084/m9.figshare.5245411.v1., mar. 2017. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/318702674. Acesso em: 5 nov. 2020.

MORIEL-JUNIOR, J. G.; WIELEWSKI, G. Potenciais oportunidades formativas com MTSK e pesquisas científicas sobre frações e operações. **REAMEC** – Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática. Cuiabá, v. 9, n.1, janeiro-abril, 2021. DOI: 10.26571/reamec.v9i1.11462.

NASEHPOUR, P. A Brief History of Algebra with a Focus on the Distributive Law and Semiring Theory. **arXiv preprint arXiv:1807.11704** (2018).

NASCIMENTO, F. L. S. C. do; MAGALHÃES, N. R. S.; MORAIS, J. de S. Formação e o desenvolvimento profissional na percepção do professor do Brasil e de Portugal. **Olhar de Professor**, [S. l.], v. 20, n. 1, p. 23–37, 2019. DOI: 10.5212/OlharProfr.v.20i1.0002. Disponível em: https://revistas.uepg.br/index.php/olhardeprofessor/article/view/12169. Acesso em: 5 ago. 2022.

OLIVEIRA, A. T.; PALIS, G.R. O potencial das atividades centradas em produções de alunos na formação de professores de matemática. **Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa**, v. 14, n. 3, p. 335-359, 2011.

OLIVEIRA, K. I. M.; FERNÁNDEZ, A. J. C. **Iniciação à Matemática**: um curso com problemas e soluções. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

OLIVEIRA, M.M. **Como fazer projetos, relatórios, monografias, dissertações e teses**. 5.ed. [rev.] - Rio de Janeiro: Elsevier, 2011.

OLIVEIRA, M. E. N.; ALMEIDA, M. S.; ESPÍNDOLA, E. B. M. **Praxeologias Matemáticas: Relações de Igualdade e Princípios de Equivalência a partir do Explorador Básico de Igualdade da Plataforma Digital PHET.** Encontro Gaúcho de Educação Matemática – UFPel – Universidade Federal de Pelotas – RS. 2021. Disponível em: https://wp.ufpel.edu.br/egem2021/files/2021/07/092.pdf, consultado em 25/04/2022.

OLIVEIRA, A.T.C.C.; FIORENTINI, D. O papel e o lugar da didática específica na formação inicial do professor de matemática. **Rev. Bras. Educ**. 23, 2018. Disponível em: https://doi.org/10.1590/S1413-24782018230020. Acesso em 16.10.2022.

PAZUCH, V.; LIMA, C. M. P.; ALBRECHT, E. Conhecimentos mobilizados por professores que ensinam matemática e o conceito de função na educação básica (Mobilized knowledge by teachers who teach mathematics and the concept of function in basic education). **Revista Eletrônica de Educação**, v. 12, n. 2, p. 361-379, 2018.

PEREIRA, A. C. S. **A história da Matemática na formação inicial de professores**: um estudo sobre os Conhecimentos Matemáticos para o ensino. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências) - Universidade Federal de Itajubá, Itajubá: 2022.

PIRES, C.M.C. **Educação Matemática: conversa com professores dos anos iniciais**. São Paulo : Zé-Zapt Editora, 2012.

POLICASTRO, M. S. **Conhecimento especializado do professor nos tópicos de divisão e do tema de medida**: abordagem para uma teorização de conexões matemáticas. 288 f. Tese (Doutorado). Programa de Pós-graduação em Educação. Universidade Estadual de Campinas. Campinas, SP, 2021

PONTE, J.P. O desenvolvimento profissional do professor de matemática. **Educação e Matemática,** 31, p. 9-20. 1994. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/handle/10451/4474. Acesso em 5 abr. 2022.

PONTE, J. P. Didácticas específicas e construção do conhecimento profissional. In J. Tavares, A. Pereira, A. P. Pedro, & H. A. Sá (Eds.), Investigar e formar em educação: **Actas do IV Congresso da SPCE,** p. 59-72. Porto: SPCE. 1999. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/handle/10451/2984. Acesso em 5 abr. 2022.

PONTE, J. P. A vertente profissional da formação inicial de professores de matemática. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, n. 11A, p. 3-8, 2002. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/02-Ponte%20(SBEM).pdf. Acesso em: 15 abr. 2022.

PONTE, J. P. Estudando o conhecimento e o desenvolvimento profissional do professor de matemática. In N. Planas (Ed.), **Educación matematics**: Teoría, critica y prática. Barcelona: Graó, p. 1-15, 2012. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/handle/10451/29194. Acesso em 25 mai. 2022.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico**. Brochura. Lisboa: DGIDC, 2009.

RAZO, C.M. **Cómo elaborar y asesorar una investigación de tesis**. 2. ed. México: Pearson Educación, 2011.

RIBEIRO, A. J. Aprendizagem profissional do professor de Matemática e o ensino de Álgebra: buscando articulações entre a escola básica e a universidade. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**, v. 14, p. 117-129, 2019. Disponível em http://funes.uniandes.edu.co/21602/1/Jacques2019Aprendizagem.pdf. Acesso: 5 abr. 2022.

RIBEIRO, A.J.; AGUIAR, M.; TREVISAN, A.L. Oportunidades de aprendizagem vivenciadas por professores ao discutir coletivamente uma aula sobre padrões e regularidades. **Quadrante**, Vol. 29, N.º 1, 2020. Disponível em https://quadrante.apm.pt/index.php/quadrante/article/view/542. Acesso em 21 dez. 2021.

RIBEIRO, A.J.; PONTE, J.P. M. Um modelo teórico para organizar e compreender as oportunidades de aprendizagem de professores para ensinar matemática. **Zetetiké**, Campinas, SP, v.28, 2020, p.1-20 – e020027.

RIBEIRO, M.; ALMEIDA, A.; MELLONE, M. Conceitualizando Tarefas Formativas para Desenvolver as Especificidades do Conhecimento Interpretativo e Especializado do Professor. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 14, n. 35, p. 1-32, 2021.

RIBEIRO, M.; GIBIM, G.; ALVES, C. A Necessária Mudança de Foco na Formação de Professores de e que Ensinam Matemática: discussão de Tarefas para a Formação e o Desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo. **Perspectivas da Educação Matemática** – INMA/UFMS – v. 14, n. 34 – Ano 2021.

RIBEIRO, R. D. G. L. **Aspectos socioculturais e políticos na especialização do conhecimento do professor de Matemática**: interfaces entre o Programa Etnomatemática e o modelo do Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (MTSK). 530 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista (Unesp). Rio Claro, 2021.

RICHIT, A. Desenvolvimento profissional de professores: um quadro teórico. **Research, Society and Development**. 10. e342101422247. 10.33448/rsd-v10i14.22247. Disponível em https://www.researchgate.net/publication/355938193. Acesso em 5 ago. 2022.

RODRIGUES, A.L.; TEIXEIRA, B.R. Conhecimento Especializado do Professor de Matemática em Dissertações e Teses Brasileiras. **Ensino**, v.22, n3, 2021, p.310-316. Disponível em: https://revistaensinoeeducacao.pgsskroton.com.br/article/view/8240. Acesso em 30.dez 2021.

RODRIGUES, A.L.; TEIXEIRA, B.R. Conhecimento especializado do professor de Matemática revelado na escrita reflexiva de futuros professores decorrente de simulações de aulas. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, [S. l.], v. 12, n. 3, p. 1–26, 2021. DOI: 10.26843/rencima.v12n3a02. Disponível em: https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/2820. Acesso em: 5 dez. 2021.

RODRIGUES, C.S.N. **Discussão matemática no ensino e aprendizagem da álgebra**. Tese de doutoramento, Educação (Didática da Matemática), Universidade de Lisboa, Instituto de Educação, 2020

SANTANA, E.; SERRAZINA, L.; NUNES, C. Contribuições de um processo formativo para o desenvolvimento profissional dos professores envolvidos. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa - **Relime**, v. 22, p. 11-38, 2019.

SANTOS, M.C.; ALMEIDA, J.R. Parâmetros balizadores da pesquisa em educação matemática no Brasil: pesquisa em educação algébrica. **Educação Matemática Pesquisa**:

Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, v. 17, n. 3, p. 541-555, 2015.

SANTOS, W. S.; AZEVEDO, S.G.M.; RODRIGUES, M.U. **Matemática no 6º Ano do Ensino Fundamental na Perspectiva das Habilidades da BNCC/DRC** - Lucas do Rio Verde/MT. Livro eletrônico. Disponível em https://www.lucasdorioverde.mt.gov.br/. Acesso: 26 jan. 2022.

SAVIANI, D. Formação de professores: aspectos históricos e teóricos do problema no contexto brasileiro. **Revista Brasileira de Educação**, v. 14, n. 40, p. 143-155, jan./abr. 2009.

SHULMAN, L. S. Those Who Understand: Knowledge Growth In Teaching. **Educacional Researcher**, v. 15, p. 4-14, 1986.

SHULMAN, L. Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. **Harvard educational review**, v. 57, n. 1, p. 1-23, 1987.

SILVA, A.A.; COSTA, G.M.P da. **Equações do Primeiro Grau**: uma proposta de aula baseada na análise de livros. Rio de Janeiro : Impa, 2014. Disponível em: https://impa.br/ensino/programas-de-formacao/mestrado-profissional-profmat/. Acesso: 5 jul. 2021.

SILVA, T.H.I.; RIBEIRO, A.J. O sinal de igualdade e seus diferentes significados: buscando rupturas na transição entre os Ensinos Fundamental I e II. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 5, n. 2, p. 75-90, 2014.

SPIELMANN, R. **Utilização e significados atribuídos ao sinal de igual**: um olhar para a produção escrita de alunos em provas de cálculo diferencial integral I. 190 f. Dissertação (Mestrado em Ciências e Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática– PPGECEM da Universidade Estadual do Oeste do Paraná/UNIOESTE. Cascavel, 2019.

TELES, R. A. M. **A relação entre aritmética e álgebra na matemática escolar**: um estudo sobre a influência da compreensão das propriedades da igualdade e do conceito de operações inversas com números racionais na resolução de equações polinomiais do 1º grau. 202 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2002.

TREVISAN, A. L., RIBEIRO, A. J.; PONTE, J. P. da. Professional learning opportunities regarding the concept of function in a practice-based teacher education program. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, 15(2), em0563. 2020. https://doi.org/10.29333/iejme/6256

TRIVILIN, L. R.; RIBEIRO, A. J. Conhecimento Matemático para o Ensino de Diferentes Significados do Sinal de Igualdade: um estudo desenvolvido com professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 29, p. 38-59, 2015.

UFABC. Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP) e a Formação de Professores que Ensinam Matemática. *Workshop* promovido pelo Grupo de pesquisa FORMATE, 2019. 1 **vídeo** (1h17m48s). Disponível em: https://youtu.be/IGv8TFpvXSE. Acesso em 8 ago.2021.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre : Penso, 2009.

WILHELMI, M. R., GODINO, J. D., LACASTA, E. Configuraciones epistemicas asociadas a la nocion de igualdad de numeros reales. Recherches en Didactique des Mathématiques, 27(1), 77-120. English version, 2011: **Quaderni di Ricerca in Didattica** (Mathematics) 21, 53-82. Disponível em: http://math.unipa.it/%7Egrim/Wilhelmi_Q21.pdf. Acesso em 27.6.2021.

YIN, R. k. **Pesquisa qualitativa do início ao fim**. Livro eletrônico. Porto Alegre: Penso, 2016.

## APÊNDICE I – Questionário aplicado aos participantes

### Questionário

| |
|---|
| 1 - Em qual nível de ensino da educação básica você considera haver mais dificuldade em álgebra? Por quê?<br>2 - Você conhece o que diz a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) com relação à área temática álgebra? Se positivo, o quê?<br>3 - Você conhece o que dizem os PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais sobre a álgebra? Se positivo, o quê?<br>4 - Para o ensino e a aprendizagem da álgebra o que você considera mais importante? Por quê?<br>5 - Com relação à álgebra ensinada na escola, você verifica conexões entre os conteúdos ensinados com as outras áreas da matemática? Quais? Por quê?<br>6 - Qual ou quais motivos você considera que mais contribui para o baixo rendimento dos estudantes com relação à álgebra? Por quê?<br>7 - O que você entende por igualdade?<br>8 - Nesta expressão: $2 + 8 = 4 + 6$, o que significa o sinal de igual “=”?<br>9 - Nesta expressão: 8 + X = 4 + 5, o que significa o sinal de igual “=”?<br>10 - Quais as propriedades da igualdade que você conhece?<br>11 - Para você, qual a importância do sinal de igual no ensino e na aprendizagem da álgebra?<br>12 - Descreva de que forma você ensinaria um estudante da educação básica a resolver a expressão: 12 + 7 = 7 + ___. |

Fonte: autor

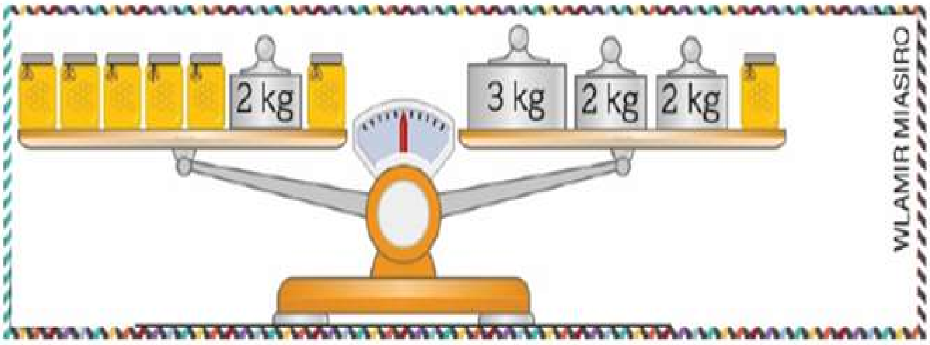
## APÊNDICE II - TAP aplicada no momento formativo

### Tarefa de Aprendizagem Profissional (TAP)

Um professor de matemática apresentou a seguinte situação: "Na feira municipal, uma banca de doces, produzidos por agricultores da região, utiliza uma balança de dois pratos para indicar a quantidade de produto que o consumidor está comprando. A comerciante colocou potes de doces todos do mesmo formato e com a mesma quantidade em uma balança que está em equilíbrio, como mostrado na imagem."

O professor explicou à turma que a balança de dois pratos é um objeto que foi muito utilizado pelo comércio no passado, antes de surgirem as balanças digitais.

Então, o professor pediu para que os estudantes encontrarem o peso de cada pote de doce e, em seguida, perguntou o que aconteceria com a balança se: 1) a comerciante retirasse um peso de 3 kg do prato da direita; 2) a comerciante retirasse pesos de 2 kg de cada lado; 3) a comerciante retirasse um peso de 2 kg do prato da direita e um pote de doce do lado esquerdo.




Fonte: adaptado de Santos, Azevedo e Rodrigues (2020, p. 61)

Dessa forma, responda os itens abaixo:

**1ª parte: (individual)**

a) Resolva a questão, encontrando o peso do pote, justificando de que forma você chegou ao resultado.

**2ª parte: (em grupo)**

Quatro alunos resolveram a questão assim:

Um aluno respondeu que cada pote de doce tem 2 kg.

Outro falou que, se retirar um peso de 3 kg do prato da direita, a balança permanecerá em equilíbrio.

O terceiro afirmou que, se a comerciante tirar o peso de 2 kg do prato da direita e 2 kg do da esquerda, a balança volta a ficar em equilíbrio.

| |
|---|
| O quarto disse que, se a comerciante retirar um peso de 2 kg do prato da direita e um pote de doce da esquerda, a balança volta a ficar em equilíbrio.<br>a) Você concorda com as respostas dos quatro alunos acima? Justifique.<br>b) Em qual ano escolar essa questão poderia ser aplicada? Por quê?<br>c) Você faria alguma adaptação nessa atividade? Qual? Por quê?<br>d) Que recursos (físicos ou digitais) você usaria para ensinar essa tarefa aos alunos no ensino fundamental? Justifique.<br>e) Quais conceitos você identificou que a tarefa aborda?<br>f) Indique uma tarefa que você trabalharia com os alunos após executar a tarefa da balança. |

Fonte: tarefa adaptada de Santos, Azevedo e Rodrigues (2020, p. 61)