Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

Métodos para Determinação de Raízes de Equações Polinomiais

Uma abordagem voltada para o ensino médio

Diógenes Silva dos Santos

Orientador
Prof. Dr. Thiago Dias Oliveira Silva

Recife-PE
Agosto de 2016

Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

Métodos para Determinação de Raízes de Equações Polinomiais

Uma abordagem voltada para o ensino médio

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Diógenes Silva dos Santos

Recife-PE
Agosto de 2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Biblioteca Central, Recife-PE, Brasil

S237m Santos, Diógenes Silva dos
Métodos para determinação de raízes de equações polinomiais: uma abordagem voltada para o ensino médio / Diógenes Silva dos Santos. – 2016.
61 f.

Orientador: Thiago Dias Oliveira Silva.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Recife, BR-PE, 2016.
Inclui referências.

1. Polinômios 2. Equações algébricas 3. Raízes I. Silva, Thiago Dias Oliveira, orient. II. Título

CDD 510

DIÓGENES SILVA DOS SANTOS

Métodos para Resolução de Equações Polinomiais: Uma Abordagem voltada para o ensino médio.

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 25 / 08 / 2016

BANCA EXAMINADORA

Thiago Dias Oliveira Silva

Prof. Dr. Thiago Oliveira Dias Silva (Orientador(a))– UFRPE

Ricardo Burity C. Macedo

Prof. Dr. Ricardo Burity Croccia Macedo – DM / UFRPE

Prof. Dr. Rodrigo José Gondim Neves– PROFMAT/UFRPE

À Karla Oliveira, que sempre me incentivou a prosseguir...

Se podes fazer o milagre, de um lindo sorriso num rosto que chora, não coloques flores sobre tumbas, se podes dar-me uma flor, fazê-o agora.

Autor desconhecido.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, e como não poderia ser diferente, ao Deus que creio e que sempre esteve presente em minha vida. Deus Esse que sempre colocou pessoas maravilhosas em minha vida, ora para me ajudar de forma gigantesca, ora para me derrubar e tornar-me mais forte. Deus que nunca me abandonou!

A minha avó Cecília Maria da Silva (in memorian), que faz uma falta infinita. Eterna gratidão e saudade. Obrigado pelo lar e carinho que a senhora me deu. Um dia espero poder pedir sua benção novamente.

A Karla Juliana, minha amiga, namorada e esposa, pessoa guerreira e amável, que sempre me apoiou e incentivou a continuar, mesmo quando o cansaço era presente. Obrigado pelo carinho, pelos sorrisos espontâneos e pelas correções dos textos, embora esse você não poderá corrigir.

Ao meu orientador, amigo e padrinho, Thiago Dias, pelo apoio, dicas, conselhos, puxões de orelha, correções e principalmente por acreditar no meu trabalho. Agradeço muito pela preocupação e vontade de ajudar. O mundo com certeza precisa de mais pessoas assim.

Aos meus amigos da *KM ENERGIA*, local onde trabalho e que tem pessoas que torceram desde o início para a concretização desse sonho. Agradeço muito a todos!

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo estudar os polinômios e suas equações algébricas. A ideia central deste projeto é produzir um material que possa servir de apoio aos professores que abordarão esse assunto e também aos alunos interessados. Nesta pesquisa priorizarei desenvolver as definições e os teoremas relacionados aos polinômios da maneira como é ensinada nos livros didáticos utilizados no ensino médio. À medida do possível utilizarei uma linguagem simples para facilitar o entendimento. Aqui o leitor encontrará as definições dos polinômios, suas propriedades operatórias, noção de grau e divisibilidade de polinômios. Apresentarei o Teorema Fundamental da Álgebra e a sua aplicação nas demonstrações. Na sequência demonstrarei vários teoremas que ajudarão nas resoluções de equações polinomiais, tais como a decomposição de polinômios em fatores, raízes conjugadas, relações de Girard, somas de Newton e polinômios recíprocos. Em seguida, abordarei as raízes racionais de polinômios com coeficientes inteiros, além de alguns resultados importantes nas soluções dessas equações. Por fim, será sugerido para fins didáticos, alguns exercícios com o objetivo de solidificar o assunto apresentado.

Palavras-chave: polinômios, equações algébricas, raízes.

Abstract

The present work aims to study the polynomials and their algebraic equations. The central idea of this project is to produce a material that can serve as a support for teachers that will address this issue and also to interested students. In this research priorizarei develop definitions and theorems related to polynomials of the way it is taught in textbooks used in high school. To the extent possible I will use plain language to facilitate understanding. Here the reader will find the definitions of polynomials, their operating properties, concept of degree and divisibility of polynomials. I will present the Fundamental Theorem of algebra and its application in the demonstrations. As a result I'll demonstrate several theorems that will help in resolutions of polynomial equations, such as the decomposition of polynomials, roots factors combined, Girard, Newton sums and reciprocal polynomials. Then I'll discuss the rational roots of polynomials with integer coefficients, plus some important results in the solutions of these equations. Finally, will be proposed for educational purposes, some exercises in order to solidify the matter presented.

keywords: polynomials, equations algebraic, roots.

Sumário

Introdução

. Após ministrar uma aula de funções quadráticas um aluno veio e fez a seguinte pergunta:

Professor, qual é o melhor livro para estudar esse assunto?

Não hesitei e respondi:

- O melhor livro é aquele em que você consegue aprender! Da mesma forma que o melhor professor é aquele que consegue lhe ensinar!

Após essas palavras tentei explicar ao aluno que não adiantaria pegar um livro com um nível de dificuldade elevado se, por acaso, ele não estivesse pronto para isso e que só o próprio estudante poderia avaliar qual seria o melhor livro para ele. Aproveitei a oportunidade e indiquei uma bibliografia para estudo.

Foi motivado por esse pensamento que ao iniciar essa dissertação quis abordar os polinômios e suas equações algébricas de uma forma que os alunos da graduação, professores iniciantes e também os próprios alunos de ensino médio pudessem estudar e compreender os assuntos referidos nesse trabalho. Durante as aulas sobre polinômios em um pré-vestibulares solidários oferecidos pela UFPE senti vontade de abordar esse tema na minha dissertação, pois, além de ter afinidade com o assunto, percebi ao longo do anos inúmeras dificuldades dos estudantes nas resoluções das equações algébricas.

Assim, esta dissertação tem como proposta contribuir para minimizar essa problemática, tendo em vista que uma das maiores dificuldades observadas em minhas aulas sobre polinômios é o pouco embasamento teórico possuído pelos alunos acerca das definições e dos teoremas aplicados nas soluções dos problemas. Aqui será feita uma coletânea dos vários assuntos abordados sobre polinômios em sala de aula no nível médio. A linguagem utilizada nas explicações será, à medida do possível, de fácil compreensão, para que todos os tipos de leitor possam assimilar melhor o conteúdo.

Reforçando essa ideia, há a própria proposta do PROFMAT que é melhorar a educação básica em matemática no país. Nesse contexto, o desenvolvimento relativo ao tema polinômios será tratado de maneira como é aplicado em sala de aula, isto é, a nível médio. Por essas razões, as definições sobre polinômios nesse projeto não serão feitas sobre anéis e corpos, como nos livros de Álgebra. Isso por que tais assuntos são abordados, normalmente, nos últimos períodos da graduação durante a disciplina de Estruturas Algébricas.

Para uma melhor compreensão, a dissertação será desenvolvida em quatro capítulos. O primeiro deles será dedicado às definições iniciais, nas quais os polinômios e seus termos serão apresentados, depois as operações básicas, tais como a adição e a multiplicação. Em seguida, serão vistos os graus da soma e da multiplicação e, por fim, a divisibilidade de polinômios. Esse capítulo é fundamental para o entendimento dos demais, já que é a partir da compreensão deste que construiremos o desenvolvimento do trabalho.

No capítulo 2 trataremos as resoluções das equações polinomiais. Dentre os assuntos abordados, veremos o Teorema Fundamental da Álgebra, a decomposição de polinômios em fatores, raízes conjugadas, além das relações de Girard, uma ferramenta importantíssima para encontrar as raízes de um polinômio quando existe alguma informação a respeito delas, também veremos as raízes irracionais e por fim, as equações recíprocas.

Já no capítulo 3 estudaremos as condições para existência de raízes racionais de um polinômio com coeficientes inteiros. Esse assunto recebeu um destaque, pois foram incluídas algumas propriedades que normalmente não são tratadas nos livros do ensino médio, como por exemplo, o método de exclusão de Newton para raízes inteiras e o critério de Eisenstein.

O capítulo 4 será composto por 13 exercícios propostos sobre os assuntos discutidos neste trabalho. Tais problemas visam revisar e solidificar o conhecimento adquirido. Junto aos exercícios seguem sugestões de resoluções.

Capítulo 1

Polinômios

1.1 Definição. Denominamos por polinômio na indeterminada x, com coeficientes complexos, a seguinte expressão matemática:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ ...\ + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k,$$

em que $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ e, por convenção, no somatório temos $x^0 = 1$.

Dizemos que:

$a_nx^n,\ a_{n-1}x^{n-1},\ ...\ , a_2x^2,\ a_1x,\ a_0$, são os *termos* do polinômio;

$a_n,\ a_{n-1},\ ...\ , a_2,\ a_1,\ a_0$, são os *coeficientes*;

$x^n,\ x^{n-1},\ ...\ , x^2,\ x$, são os *termos literais*;

a_n é o *coeficiente dominante* ou *coeficiente líder*;

a_0 é o *termo independente* ou *coeficiente independente*;

n é o *grau.*

Notação: Embora alguns autores utilizam a notação *deg* para denotar o grau de um polinômio, nesse trabalho empregaremos o símbolo ∂ para indicação do grau de um polinômio.

Por uma questão de simplicidade, daqui por diante, a menos de menção ao contrário, sempre que nos referirmos a um polinômio $p(x)$ admitiremos que os coeficientes são números complexos e $a_n \neq 0$. Nos casos em que os coeficientes do polinômio $p(x)$ pertencerem a um subconjunto dos números complexos será informado no enunciado.

1.2 Exemplo. Dado $p(x) = 3x^7 + (7 - 2i)x^6 + 4x^4 + (2 - 3i)x^2 - 19x - 6$, temos:

Os termos são: $3x^7$, $(7-2i)x^6$, $4x^4$, $(2-3i)x^2$, $-19x$ e -6;

Os coeficientes são: 3, $7-2i$, 4, $2-3i$, -19 e -6;

O coeficiente dominante é: 3;

O coeficiente independente é: -6;

O grau é: 7.

1.3 Definição. Considere o polinômio $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ ... \ + a_2x^2 + a_1x + a_0$ e um número complexo α. Denominamos por *valor numérico do polinômio* $p(x)$ em α, o número $p(\alpha)$ encontrado ao substituir α por x em $p(x)$, ou seja,

$$p(\alpha) = a_n(\alpha)^n + a_{n-1}(\alpha)^{n-1} + \ ... \ + a_2(\alpha)^2 + a_1(\alpha) + a_0.$$

1.4 Exemplo. Determine o valor numérico do polinômio $p(x) = -5x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 7x - 13$ para $\alpha = 1 + i$, tal que, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Solução: Dado $p(x) = -5x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 7x - 13$, então:

$p(\alpha) = -5(\alpha)^4 - 2(\alpha)^3 + 3(\alpha)^2 + 7(\alpha) - 13 \Rightarrow$

$p(\alpha) = -5(1+i)^4 - 2(1+i)^3 + 3(1+i)^2 + 7(1+i) - 13 \Rightarrow$

$p(\alpha) = -5(-4) - 2(-2+2i) + 3(2i) + 7(1+i) - 13 \Rightarrow$

$p(\alpha) = 20 + 4 - 4i + 6i + 7 + 7i - 13 \Rightarrow$

$p(\alpha) = 18 + 9i.$

1.5 Definição. Seja o polinômio $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ ... \ + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Denominamos por *raiz* do polinômio $p(x)$ todo número $\alpha \in \mathbb{C}$, tal que, $p(\alpha) = 0$.

1.6 Exemplo. As raízes de $p(x) = x^4 + (-7+2i)x^3 + (17-12i)x^2 + (-17+22i)x + 6 - 12i$ são 1, 2, 3 e $1-2i$, pois:

$p(1) = (1)^4 + (-7+2i)(1)^3 + (17-12i)(1)^2 + (-17+22i)(1) + 6 - 12i = 0;$

$p(2) = (2)^4 + (-7+2i)(2)^3 + (17-12i)(2)^2 + (-17+22i)(2) + 6 - 12i = 0;$

$p(3) = (3)^4 + (-7+2i)(3)^3 + (17-12i)(3)^2 + (-17+22i)(3) + 6 - 12i = 0;$

$p(1-2i) = (1-2i)^4 + (-7+2i)(1-2i)^3 + (17-12i)(1-2i)^2 + (-17+22i)(1-2i) + 6 - 12i = 0.$

A *soma dos coeficientes* do polinômio $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ ... \ + a_2x^2 + a_1x + a_0$ é o valor numérico de $p(x)$ quando $x = 1$. Com efeito:

$p(1) = a_n(1)^n + a_{n-1}(1)^{n-1} + \ ... \ + a_2(1)^2 + a_1(1) + a_0 \Rightarrow$

$p(1) = a_n + a_{n-1} + \ ... \ + a_2 + a_1 + a_0.$

O *coeficiente independente* do polinômio $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ é o valor numérico de $p(x)$ quando $x = 0$. De fato:

$p(0) = a_n(0)^n + a_{n-1}(0)^{n-1} + \ ... \ + a_2(0)^2 + a_1(0) + a_0 \Rightarrow$

$p(0) = 0 + 0 + \ ... \ + 0 + 0 + a_0 \Rightarrow$

$p(0) = a_0.$

1.7 Definição. Denominamos por *polinômio nulo,* ou *identicamente nulo,* o polinômio $p(x)$, tal que, $p(\alpha) = 0$, para qualquer valor de $\alpha \in \mathbb{C}$.
Notação: $p(x) = 0$ ou $p(x) \equiv 0$.

1.8 Teorema (**Coeficientes do Polinômio Nulo**). *O polinômio* $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ ... \ + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ *é nulo se, e somente se, todos os seus coeficientes são iguais a zero, ou seja,*

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow a_0 = a_1 = a_2 = \ ... \ = a_{n-1} = a_n = 0.$$

Demonstração. ($\Leftarrow$)
Hipótese: $a_0 = a_1 = a_2 = \ ... \ = a_{n-1} = a_n = 0.$
Tese: $p(x) = 0.$

Seja $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ ... \ + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ e, por hipótese, $a_0 = a_1 = a_2 = \ ... \ = a_{n-1} = a_n = 0$, então $p(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \ ... \ + 0x^{n-1} + 0x^n$. Desta forma, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, temos $p(\alpha) = 0 + 0(\alpha) + 0(\alpha)^2 + \ ... \ + 0(\alpha)^{n-1} + 0(\alpha)^n \Rightarrow p(x) = 0$, o que demonstra a volta do teorema.

($\Rightarrow$)
Hipótese: $p(x) = 0.$
Tese: $a_0 = a_1 = a_2 = \ ... \ = a_{n-1} = a_n = 0.$

Por hipótese, $p(x) = 0$, então o seu valor numérico é $p(\alpha) = 0$, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. Considere $\alpha_0, \ \alpha_1, \ \alpha_2, \ ... \ , \ \alpha_{n-1}, \ \alpha_n,$ como sendo $n + 1$ números complexos, distintos dois a dois. Logo,

$$p(\alpha_0) = a_0 + a_1(\alpha_0) + a_2(\alpha_0)^2 + ... + a_{n-1}(\alpha_0)^{n-1} + a_n(\alpha_0)^n$$

$$p(\alpha_1) = a_0 + a_1(\alpha_1) + a_2(\alpha_1)^2 + ... + a_{n-1}(\alpha_1)^{n-1} + a_n(\alpha_1)^n$$

$$p(\alpha_2) = a_0 + a_1(\alpha_2) + a_2(\alpha_2)^2 + ... + a_{n-1}(\alpha_2)^{n-1} + a_n(\alpha_2)^n$$

$$\begin{matrix} . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{matrix}$$

$$p(\alpha_{n-1}) = a_0 + a_1(\alpha_{n-1}) + a_2(\alpha_{n-1})^2 + ... + a_{n-1}(\alpha_{n-1})^{n-1} + a_n(\alpha_{n-1})^n$$

$$p(\alpha_n) = a_0 + a_1(\alpha_n) + a_2(\alpha_n)^2 + ... + a_{n-1}(\alpha_n)^{n-1} + a_n(\alpha_n)^n$$

Note que as equações acima formam um sistema linear homogêneo, com $n + 1$ equações e $n + 1$ incógnitas, que são $a_0,\ a_1,\ a_2,\ ...\ ,\ a_{n-1},\ a_n$. Com as equações acima podemos representar a matriz incompleta do sistema por A e sua transposta por A^t, conforme a matriz abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_0 & (\alpha_0)^2 & ... & (\alpha_0)^{n-1} & (\alpha_0)^n \\ 1 & \alpha_1 & (\alpha_1)^2 & ... & (\alpha_1)^{n-1} & (\alpha_1)^n \\ 1 & \alpha_2 & (\alpha_2)^2 & ... & (\alpha_2)^{n-1} & (\alpha_2)^n \\ . & . & . & ... & . & . \\ . & . & . & ... & . & . \\ . & . & . & ... & . & . \\ 1 & \alpha_{n-1} & (\alpha_{n-1})^2 & ... & (\alpha_{n-1})^{n-1} & (\alpha_{n-1})^n \\ 1 & \alpha_n & (\alpha_n)^2 & ... & (\alpha_n)^{n-1} & (\alpha_n)^n \end{bmatrix}.$$

Sabendo que o determinante de uma matriz é igual ao determinante da sua transposta, temos que $Det\ A = Det\ A^t$. Observe que a matriz A^t é a matriz de ***Vandermonde*** (*Alexandre-Théophile Vandermonde*, 1735-1796. Vandermonde foi músico, químico e matemático), cujo determinante é obtido por:

$$Det\ A^t = (\alpha_1 - \alpha_0) \cdot (\alpha_2 - \alpha_0) \cdot\ ...\ \cdot (\alpha_n - \alpha_0) \cdot\ ...\ \cdot (\alpha_n - \alpha_{n-1}) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i).$$

Agora, por hipótese, $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ ...\ ,\ \alpha_{n-1},\ \alpha_n$ são distintos dois a dois, então nenhum dos fatores do $Det\ A^t$ se anula. Logo, $Det\ A^t \neq 0$. Portanto, a única solução do sistema é a trivial, ou seja, $a_0 = a_1 = a_2 =\ ...\ = a_{n-1} = a_n = 0$, o que demonstra a ida do teorema. $\square$

1.9 Exemplo. Determine os valores de a, b, c e d sabendo que é identicamente nulo o polinômio $p(x) = (a-3)x^3 + (a-b+2)x^2 + (b+2c-1)x + (2c+4d)$.

Solução: Sabendo que $p(x)$ é identicamente nulo, então podemos formar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a-3=0 \\ a-b+2=0 \\ b+2c-1=0 \\ 2c+4d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-3=0 \Rightarrow a=3 \\ a-b+2=0 \Rightarrow b=a+2=3+2 \Rightarrow b=5 \\ b+2c-1=0 \Rightarrow 2c=1-b=1-5 \Rightarrow c=-2 \\ 2c+4d=0 \Rightarrow 4d=-2c \Rightarrow 4d=-2(-2) \Rightarrow d=1 \end{cases}.$$

Desta forma, $a=3$, $b=5$, $c=-2$ e $d=1$.

1.10 Definição. Dois polinômios $p(x)$ e $h(x)$ são *iguais* ou *idênticos* quando assumem o mesmo valor numérico para todo $\alpha \in \mathbb{C}$.
Notação: $p(x) = h(x)$ ou $p(x) \equiv h(x)$.

1.11 Definição. Dois ou mais termos, não nulos, são *semelhantes* quando tem a mesma parte literal, ou seja, quando possuem a mesma variável e o mesmo expoente.

1.12 Exemplo. $5x^7$ e $-3x^7$ são termos semelhantes.

1.13 Exemplo. $20x^5$ e $13x^4$ não são termos semelhantes.

1.14 Teorema (Da Igualdade de Polinômios). *Dois Polinômios*

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ ... \ + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \quad e \\ h(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ ... \ + b_{n-1}x^{n-1} + b_nx^n \end{aligned}$$

são idênticos, ou iguais se, e somente se, os coeficientes dos seus respectivos termos semelhantes são iguais, ou seja,

$$a_0 = b_0, \ a_1 = b_1, \ a_2 = b_2, \ ... \ , \ a_{n-1} = b_{n-1}, \ a_n = b_n.$$

Demonstração. $(\Leftarrow)$
Hipótese: $a_0 = b_0, \ a_1 = b_1, \ a_2 = b_2, \ ... \ , \ a_{n-1} = b_{n-1}, \ a_n = b_n$.
Tese: $p(x) = h(x)$.

Tome um número $\alpha \in \mathbb{C}$, então $p(\alpha) = a_0 + a_1(\alpha) + a_2(\alpha)^2 + \ ... \ + a_{n-1}(\alpha)^{n-1} + a_n(\alpha)^n$ e $h(\alpha) = b_0 + b_1(\alpha) + b_2(\alpha)^2 + \ ... \ + b_{n-1}(\alpha)^{n-1} + b_n(\alpha)^n$. Por hipótese, temos $a_0 = b_0$,

$a_1 = b_1,\ \ a_2 = b_2,\ \ ...\ ,\ \ a_{n-1} = b_{n-1},\ a_n = b_n$. Então, $p(\alpha) = h(\alpha)$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{C}$. Logo, $p(x) = h(x)$.

$(\Rightarrow)$

Hipótese: $p(x) = h(x)$.

Tese: $a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ ...\ ,\ a_{n-1} = b_{n-1},\ a_n = b_n$.

Por hipótese, $p(x) = h(x)$ e como os polinômios são idênticos, então $p(\alpha) = h(\alpha)$, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. Desta forma, temos:

$a_0 + a_1(\alpha) + a_2(\alpha)^2 + ... + a_{n-1}(\alpha)^{n-1} + a_n(\alpha)^n =$

$b_0 + b_1(\alpha) + b_2(\alpha)^2 + ... + b_{n-1}(\alpha)^{n-1} + b_n(\alpha)^n \Rightarrow$

$a_0 - b_0 + a_1(\alpha) - b_1(\alpha) + a_2(\alpha)^2 - b_2(\alpha)^2 + ... + a_{n-1}(\alpha)^{n-1} - b_{n-1}(\alpha)^{n-1} + a_n(\alpha)^n - b_n(\alpha)^n = 0 \Rightarrow$

$$a_0 - b_0 + (a_1 - b_1)(\alpha) + (a_2 - b_2)(\alpha)^2 + \ ...\ + (a_{n-1} - b_{n-1})(\alpha)^{n-1} + (a_n - b_n)(\alpha)^n = 0. \quad (1.1)$$

Definindo um polinômio $t(x)$ pela identidade 1.1, $t(x)$ possui infinitas raízes. Logo, $t(x) = a_0 - b_0 + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \ ...\ + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + (a_n - b_n)x^n = 0$. Porém, como $t(x)$ é um polinômio nulo. Assim, $a_0 - b_0 = 0$, $a_1 - b_1 = 0$, $a_2 - b_2 = 0, ...,$ $a_{n-1} - b_{n-1} = 0$, $a_n - b_n = 0$ e, consequentemente, $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, ...,$ $a_{n-1} = b_{n-1},\ a_n = b_n$, como queríamos demonstrar. □

1.15 Exemplo. Determine as incógnitas a, b, c e d sabendo que são idênticos os polinômios $p(x) = ax^3 - 7x^2 + 5x + d$ e $h(x) = 2x^3 + (a - b)x^2 + (b + c)x - 3$.

Solução: Dados $p(x) = ax^3 - 7x^2 + 5x + d$ e $h(x) = 2x^3 + \ (a - b)x^2 + (b + c)x - 3$ que são polinômios idênticos, então $p(x) = h(x)$. Logo, igualando os termos de mesmo grau, obtemos:

$$\begin{cases} ax^3 = 2x^3 \\ (a-b)x^2 = -7x^2 \\ (b+c)x = 5x \\ d = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a - b = -7 \Rightarrow b = a + 7 = 2 + 7 \Rightarrow b = 9 \\ b + c = 5 \Rightarrow c = 5 - b = 5 - 9 \Rightarrow c = -4 \\ d = -3 \end{cases}.$$

Portanto, $a = 2$, $b = 9$, $c = -4$ e $d = -3$.

1.1 Operações entre Polinômios

1.1.1 Adição de Polinômios

Considere os polinômios

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ \dots \ + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k \\ h(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ \dots \ + b_{m-1}x^{m-1} + b_mx^m = \sum_{k=0}^{m} b_kx^k \quad \text{e} \\ t(x) &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ \dots \ + c_{w-1}x^{w-1} + c_wx^w = \sum_{k=0}^{w} c_kx^k. \end{aligned}$$

Permutando os índices, se necessário, podemos supor que $n > m > w$, de tal forma que $b_k = 0$ para $m+1 \leq k \leq n$ e $c_k = 0$ para $w+1 \leq k \leq n$. Sendo assim, podemos escrever

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k,\ h(x) = \sum_{k=0}^{n} b_kx^k \text{ e } t(x) = \sum_{k=0}^{n} c_kx^k.$$

1.16 Definição. Denominamos por adição, ou simplesmente por soma, de $p(x)$ e $h(x)$ o polinômio:

$$p(x) + h(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \ \dots \ + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + (a_n + b_n)x^n.$$

1.17 Exemplo. Sejam os polinômios $p(x) = 6 - 5x + x^2 - 7x^3$ e $h(x) = -1 + x + 2x^2 - 3x^4$, que podem ser representados por $p(x) = 6 - 5x + x^2 - 7x^3 + 0x^4$ e $h(x) = -1 + x + 2x^2 + 0x^3 - 3x^4$. Logo, $p(x) + h(x) = (6-1) + (-5+1)x + (1+2)x^2 + (-7+0)x^3 + (0-3)x^4 \Rightarrow p(x) + h(x) = 5 - 4x + 3x^2 - 7x^3 - 3x^4$

Em outras palavras, a adição de polinômios nada mais é do que a adição dos coeficientes dos termos semelhantes.

1.18 Proposição. ***A adição é comutativa.***

Sejam os polinômios $p(x)$ e $h(x)$ temos:

$$p(x) + h(x) = h(x) + p(x).$$

Demonstração. Considere $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k$ e $h(x) = \sum_{k=0}^{n} b_kx^k$.

Portanto,

$$p(x) + h(x) = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k + \sum_{k=0}^{n} b_kx^k =$$

$$\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)x^k=\sum_{k=0}^{n}(b_k+a_k)x^k=$$

$$\sum_{k=0}^{n}b_kx^k+\sum_{k=0}^{n}a_kx^k=h(x)+p(x).$$

□

1.19 Proposição. ***A adição é associativa.***

Sejam os polinômios $p(x)$, $h(x)$ e $t(x)$ temos:

$$[p(x)+h(x)]+t(x)=p(x)+[h(x)+t(x)].$$

Demonstração. Considere os polinômios $p(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k$, $h(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}b_kx^k$ e $t(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}c_kx^k$.

Note que:

$$[p(x)+h(x)]+t(x)=\left[\sum_{k=0}^{n}a_kx^k+\sum_{k=0}^{n}b_kx^k\right]+\sum_{k=0}^{n}c_kx^k=$$

$$\left[\sum_{k=0}^{n}(a_kx^k+b_kx^k)\right]+\sum_{k=0}^{n}c_kx^k=\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)x^k+\sum_{k=0}^{n}c_kx^k=$$

$$\sum_{k=0}^{n}[(a_k+b_k)x^k+c_kx^k]=\sum_{k=0}^{n}[(a_k+b_k)+c_k]x^k=$$

$$\sum_{k=0}^{n}[a_k+(b_k+c_k)]x^k=\sum_{k=0}^{n}[a_kx^k+(b_k+c_k)x^k]=$$

$$\sum_{k=0}^{n}a_kx^k+\sum_{k=0}^{n}(b_k+c_k)x^k=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k+\left[\sum_{k=0}^{n}(b_kx^k+c_kx^k)\right]=$$

$$\sum_{k=0}^{n}a_kx^k+\left[\sum_{k=0}^{n}b_kx^k+\sum_{k=0}^{n}c_kx^k\right]=p(x)+[h(x)+t(x)].$$

□

1.20 Proposição. ***Existe o elemento neutro da adição.***

Seja o polinômio $p(x)$, existe um elemento $e(x)$, tal que, $p(x)+e(x)=p(x)$.

Demonstração. Considere os polinômios $p(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k$ e $e(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}e_kx^k$. Porém, como $p(x)+e(x)=p(x)$, então $\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k+\sum\limits_{k=0}^{n}e_kx^k=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k \Leftrightarrow \sum\limits_{k=0}^{n}(a_kx^k+e_kx^k)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k \Leftrightarrow$ $\sum\limits_{k=0}^{n}(a_k+e_k)x^k=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k$, ou seja, $a_k+e_k=a_k$, para $0\leq k\leq n$ e $n\in\mathbb{N}$. Sendo assim, $a_k+e_k=a_k \Rightarrow e_k=0$. Desta maneira, concluímos que o elemento neutro da adição de polinômios é o polinômio nulo. □

1.21 Proposição. ***Existe o elemento oposto, ou inverso, da adição.***

Seja o polinômio $p(x)$, existe um elemento $p^*(x)$, tal que, $p(x) + p^*(x) = e(x)$.

Demonstração. Considere os polinômios $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ e $p^*(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k^* x^k$. Porém, como $p(x)+p^*(x) = e(x)$, então $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=0}^{n} a_k^* x^k = \sum_{k=0}^{n} e_k x^k \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}(a_k x^k + a_k^* x^k) = \sum_{k=0}^{n} e_k x^k \Leftrightarrow$ $\sum_{k=0}^{n}(a_k + a_k^*)x^k = \sum_{k=0}^{n} e_k x^k$, ou seja, $a_k + a_k^* = e_k$, mas $e_k = 0$, então $a_k^* = -a_k$, para $0 \leq k \leq n$ e $n \in \mathbb{N}$. □

O polinômio oposto de $p(x)$ é representado por $-p(x)$.

Note que $-p(x) = -(a_n)x^n - (a_{n-1})x^{n-1} - \ ... \ - (a_2)x^2 - (a_1)x - a_0$.

1.22 Definição (Subtração de polinômios.)**.** Considere os polinômios $p(x)$ e $h(x)$. Denominamos por subtração ou diferença de $p(x)$ e $h(x)$, representada por $p(x) - h(x)$, o polinômio definido por:

$$p(x) - h(x) = p(x) + [-h(x)].$$

Sejam os polinômios

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ ... \ + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \quad \text{e} \\ h(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ ... \ + b_{n-1}x^{n-1} + b_nx^n, \end{aligned}$$

então: $p(x) - h(x) = p(x) + [-h(x)] =$
$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ ... \ + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n + (-b_0 - b_1x - b_2x^2 - \ ... \ - b_{n-1}x^{n-1} - b_nx^n) =$
$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ ... \ + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n - b_0 - b_1x - b_2x^2 - \ ... \ - b_{n-1}x^{n-1} - b_nx^n =$
$a_0 - b_0 + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \ ... \ + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + (a_n - b_n)x^n$.

Em outras palavras, a diferença dos polinômios de $p(x)$ e $h(x)$ nada mais é do que a adição de $p(x)$ com o oposto aditivo de $h(x)$.

1.1.2 Multiplicação de Polinômios

Considere os polinômios

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ ... \ + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k, \\ h(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ ... \ + b_{m-1}x^{m-1} + b_mx^m = \sum_{k=0}^{m} b_kx^k \quad \text{e} \\ t(x) &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ ... \ + c_{w-1}x^{w-1} + c_wx^w = \sum_{k=0}^{w} c_kx^k. \end{aligned}$$

A multiplicação entre $p(x)$ e $h(x)$ é realizada em duas etapas, a saber:

primeira etapa: Multiplicamos cada termo de $p(x)$ com os termos de $h(x)$, obedecendo a seguinte regra: $(ax^n) \cdot (bx^m) = (a \cdot b)x^{n+m}$.

segunda etapa: Somamos os termos semelhantes, ou seja, somamos os termos literais de mesmo expoente, conforme a seguinte regra: $ax^m + bx^m = (a + b)x^m$.

1.23 Definição. Denominamos por multiplicação de polinômios $p(x)$ e $h(x)$, representado por $p(x) \cdot h(x)$, o polinômio produto, tal que,

$p(x) \cdot h(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + ... + a_nb_mx^{n+m}$, no qual o coeficiente de um termo qualquer de x^k no produto $p(x) \cdot h(x)$ é da forma:
$a_0b_k + a_1b_{k-1} + a_2b_{k-2} + ... + a_{k-1}b_1 + a_kb_0 = \sum\limits_{j=0}^{k} a_jb_{k-j}$, em que, $j \leq n$ e $0 \leq k - j \leq m$.

1.24 Exemplo. Sejam $p(x) = 3 + 2x^2 + 5x^3$ e $h(x) = -2 + x + 4x^4$, então:

$p(x) \cdot h(x) = (3 + 2x^2 + 5x^3) \cdot (-2 + x + 4x^4) \Rightarrow$

$p(x) \cdot h(x) = 3(-2) + 3(x) + 3(4x^4) + 2x^2(-2) + 2x^2(x) + 2x^2(4x^4) + 5x^3(-2) + 5x^3(x) + 5x^3(4x^4) \Rightarrow$

$p(x) \cdot h(x) = -6 + 3x + 12x^4 - 4x^2 + 2x^3 + 8x^6 - 10x^3 + 5x^4 + 20x^7 \Rightarrow$

$p(x) \cdot h(x) = -6 + 3x - 4x^2 - 8x^3 + 17x^4 + 8x^6 + 20x^7$.

1.25 Proposição. ***A multiplicação é comutativa.***

Sejam os polinômios $p(x)$ e $h(x)$ temos:

$$p(x) \cdot h(x) = h(x) \cdot p(x).$$

Demonstração. Considere os polinômios

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ ... \ + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \ \text{ e} \\ h(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ ... \ + b_{m-1}x^{m-1} + b_mx^m. \end{aligned}$$

Logo, $p(x) \cdot h(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + ... + a_nb_mx^{n+m}$ e
$h(x) \cdot p(x) = b_0a_0 + (b_0a_1 + b_1a_0)x + (b_0a_2 + b_1a_1 + b_2a_0)x^2 + ... + b_ma_nx^{m+n}$.
Perceba que um coeficiente qualquer de x^k no produto $p(x) \cdot h(x)$ é da forma:
$a_0b_k + a_1b_{k-1} + a_2b_{k-2} + \ ... \ + a_{k-1}b_1 + a_kb_0$ e no produto $h(x) \cdot p(x)$ é:

$b_0a_k + b_1a_{k-1} + b_2a_{k-2} + \ ... \ + b_{k-1}a_1 + b_ka_0$. Entretanto, como no conjunto dos números complexos a adição e a multiplicação são comutativas, então os coeficientes de x^k dos polinômios $p(x) \cdot h(x)$ e $h(x) \cdot p(x)$ são iguais. Portanto, $p(x) \cdot h(x) = h(x) \cdot p(x)$. □

1.26 Proposição. ***A multiplicação é associativa.***

Sejam os polinômios $p(x)$, $h(x)$ e $t(x)$ temos:

$$[p(x) \cdot h(x)] \cdot t(x) = p(x) \cdot [h(x) \cdot t(x)].$$

Demonstração. Considere os polinômios

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ ... \ + a_nx^n, \\ h(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ ... \ + b_mx^m \quad \text{e} \\ t(x) &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ ... \ + c_wx^w. \end{aligned}$$

Logo, $[p(x) \cdot h(x)] = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \ ... \ + a_nb_mx^{n+m}$.

Representaremos um coeficiente qualquer de x^k no produto $p(x) \cdot h(x)$ da seguinte forma: $d_0 = a_0b_0$; $d_1 = a_0b_1 + a_1b_0$; $d_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0$ e generalizando: $d_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + a_2b_{k-2} + \ ... \ + a_{k-1}b_1 + a_kb_0 = \sum_{j=0}^{k} a_jb_{k-j}$, tal que, $k \leq n$ e $0 \leq k-j \leq m$, ou seja, $p(x) \cdot h(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2 + \ ... \ + d_{(n+m)}x^{n+m}$.

Agora, $[p(x) \cdot h(x)] \cdot t(x) = d_0c_0 + (d_0c_1 + d_1c_0)x + \ ... \ + d_{(n+m)}c_wx^{(n+m)+w} \Rightarrow$

$[p(x) \cdot h(x)] \cdot t(x) = (a_0b_0)c_0 + [(a_0b_0)c_1 + (a_0b_1 + a_1b_0)c_0]x + \ ... \ + [(a_nb_m)c_w]x^{(n+m)+w} \Rightarrow$

$$[p(x) \cdot h(x)] \cdot t(x) = a_0b_0c_0 + (a_0b_0c_1 + a_0b_1c_0 + a_1b_0c_0)x + \ ... \ + a_nb_mc_wx^{n+m+w}. \quad (1.2)$$

De forma análoga, temos que:
$h(x) \cdot t(x) = b_0c_0 + (b_0c_1 + b_1c_0)x + \ ... \ + b_mc_wx^{m+w}$.

Representaremos um coeficiente qualquer de x^k no produto $h(x) \cdot t(x)$ da seguinte maneira: $e_0 = b_0c_0$; $e_1 = b_0c_1 + b_1c_0$; $e_2 = b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0$ e generalizando: $e_s = b_0c_s + b_1c_{s-1} + b_2c_{s-2} + \ ... \ + b_{s-1}c_1 + b_sc_0 = \sum_{l=0}^{s} b_lc_{s-l}$, tal que, $s \leq m$ e $0 \leq s-l \leq w$, ou seja, $h(x) \cdot h(x) = e_0 + e_1x + e_2x^2 + \ ... \ + e_{(m+w)}x^{m+w}$.

Agora, $p(x) \cdot [h(x) \cdot t(x)] = a_0e_0 + (a_0e_1 + a_1e_0)x + \ ... \ + a_ne_{(m+w)}x^{n+(m+w)} \Rightarrow$

$p(x) \cdot [h(x) \cdot t(x)] = a_0(b_0c_0) + [a_0(b_0c_1 + b_1c_0) + a_1(b_0c_0)]x + \ ... \ + [a_n(b_mc_w)]x^{n+(m+w)} \Rightarrow$

$$p(x) \cdot [h(x) \cdot t(x)] = a_0b_0c_0 + (a_0b_0c_1 + a_0b_1c_0 + a_1b_0c_0)x + \ ... \ + a_nb_mc_wx^{n+m+w}. \quad (1.3)$$

Perceba que as equações 1.2 e 1.3 são idênticas. Assim, concluímos que:

$$p(x) \cdot [h(x) \cdot t(x)] = [p(x) \cdot h(x)] \cdot t(x).$$

□

1.27 Proposição. ***Existe o elemento neutro da multiplicação.***

Seja o polinômio $p(x)$, existe um elemento $e^*(x)$, tal que,

$$p(x) \cdot e^*(x) = p(x).$$

Demonstração. **Primeira parte:** Existência: Considere os polinômios $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ \dots \ + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ e $e^*(x) = e_0^* + e_1^*x + e_2^*x^2 + \ \dots \ + e_{m-1}^*x^{m-1} + e_m^*x^m$, tal que, $e_0^* = 1$ e $e_k^* = 0$, para todo $k \geq 1$. Desta forma, temos que $p(x) \cdot e^*(x) = p(x)$, para qualquer $p(x)$. Logo, $e^*(x) = 1$ é o polinômio neutro da multiplicação.

Segunda parte: Unicidade: Suponha que o elemento neutro da multiplicação não seja único. Logo, existe um elemento $e^{**}(x)$, tal que, $p(x) \cdot e^{**}(x) = p(x)$. Assim, temos $e^*(x) \cdot e^{**}(x) = e^*(x)$ e $e^{**}(x) \cdot e^*(x) = e^{**}(x)$. Agora, pela comutatividade dos polinômios, temos que $e^*(x) = e^{**}(x)$. Desta forma, concluímos que o elemento neutro da multiplicação de polinômios é único. □

1.28 Proposição. ***Distributividade da multiplicação.***

Sejam os polinômios $p(x)$, $h(x)$ e $t(x)$, então

$$[p(x) + h(x)] \cdot t(x) = p(x) \cdot t(x) + h(x) \cdot t(x).$$

Demonstração. Considere os polinômios

$$\begin{array}{rcl} p(x) & = & a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ \dots \ + a_nx^n, \\ h(x) & = & b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ \dots \ + b_mx^m \quad \text{e} \\ t(x) & = & c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ \dots \ + c_wx^w. \end{array}$$

Logo, $p(x) + h(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \ \dots \ + (a_n + b_n)x^n$.

Representaremos um coeficiente qualquer de x^k do polinômio $p(x) + h(x)$ da seguinte forma:

$d_0 = a_0 + b_0$; $d_1 = a_1 + b_1$; $d_2 = a_2 + b_2$ e generalizando $d_k = a_k + b_k$.

Donde, $p(x) + h(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2 + \dots + d_nx^n$ e

$[p(x)+h(x)]\cdot t(x) = d_0c_0 + (d_0c_1 + d_1c_0)x + \ ... \ + d_nc_wx^{n+w} \Rightarrow$

$[p(x)+h(x)]\cdot t(x) = (a_0+b_0)c_0 + [(a_0+b_0)c_1 + (a_1+b_1)c_0]x + \ ... \ + (a_n+b_n)c_wx^{n+w} \Rightarrow$

$$[p(x)+h(x)]\cdot t(x) = a_0c_0+b_0c_0+(a_0c_1+b_0c_1+a_1c_0+b_1c_0)x+ \ ... \ +(a_nc_w+b_nc_w)x^{n+w}. \quad (1.4)$$

Agora, vamos encontrar $p(x)\cdot t(x) + h(x)\cdot t(x)$:

$p(x)\cdot t(x) = a_0c_0 + (a_0c_1 + a_1c_0)x + \ ... \ + a_nc_wx^{n+w}$ e

$h(x)\cdot t(x) = b_0c_0 + (b_0c_1 + b_1c_0)x + \ ... \ + b_nc_wx^{n+w}$, então

$$p(x)\cdot t(x) + h(x)\cdot t(x) =$$
$$a_0c_0 + b_0c_0 + (a_0c_1 + a_1c_0)x + (b_0c_1 + b_1c_0)x + ... + (a_nc_w)x^{n+w} + (b_nc_w)x^{n+w} \Rightarrow$$

$$p(x)\cdot t(x) + h(x)\cdot t(x) = a_0c_0 + b_0c_0 + (a_0c_1 + a_1c_0 + b_0c_1 + b_1c_0)x + ... + (a_nc_w + b_nc_w)x^{n+w}. \quad (1.5)$$

Observe que as equações 1.4 e 1.5 são idênticas e concluímos que:

$$[p(x)+h(x)]\cdot t(x) = p(x)\cdot t(x) + h(x)\cdot t(x).$$

□

1.1.3 Grau da Soma de Dois Polinômios

1.29 Proposição. *Dados dois polinômios, não nulos, então:*

i) Se $p(x)+h(x) \neq 0$, *então o* $\partial[p(x)+h(x)] \leq$ *máx.*$\{\partial[p(x)];\ \partial[h(x)]\}$;

ii) Se $\partial[p(x)] \neq \partial[h(x)]$, *então o* $\partial[p(x)+h(x)] =$ *máx.*$\{\partial[p(x)];\ \partial[h(x)]\}$.

Demonstração. Dados dois polinômios,

$$\begin{aligned} p(x) &= a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ ... \ + a_1x + a_0 \ \text{ e} \\ h(x) &= b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ ... \ + b_1x + b_0, \end{aligned}$$

tais que, $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$.

Temos três casos a considerar: $n > m$, $m > n$ e $n = m$. Porém, os dois primeiros casos são análogos. Sendo assim, verificaremos o primeiro e terceiro casos:

Primeiro caso: $n > m$.

Tome:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ ... \ + \ a_mx^m + \ ... \ + a_1x + a_0 \ \text{ e} \\ h(x) &= 0x^n + 0x^{n-1} + \ ... \ + b_mx^m + \ ... \ + b_1x + b_0. \end{aligned}$$

Desta forma:

$p(x)+h(x) = (a_n+0)x^n+(a_{n-1}+0)x^{n-1}+\ ...\ +(a_m+b_m)x^m+\ ...\ +(a_1+b_1)x+a_0+b_0 \Rightarrow$ $p(x)+h(x) = a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ ...\ +(a_m+b_m)x^m+\ ...\ +(a_1+b_1)x+a_0+b_0$. Portanto, o $\partial[p(x)+h(x)] = n = \textit{máx.}\{\partial[p(x)];\ \partial[h(x)]\}$.

Observe que, ao analisar os casos $n > m$ e $m > n$, provamos *ii*. Agora, vamos verificar o caso quando $n = m$ para concluirmos a prova de *i*:

Terceiro caso: $n = m$.

Tome:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} +\ ...\ + a_1x + a_0 \text{ e} \\ h(x) &= b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} +\ ...\ + b_1x + b_0. \end{aligned}$$

Desta forma:

$p(x)+h(x) = (a_n+b_n)x^n + (a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1} +\ ...\ + (a_1+b_1)x + b_0 + b_0$. Portanto, o $\partial[p(x)+h(x)] \leq \textit{máx.}\{\partial[p(x)];\ \partial[h(x)]\}$. □

1.30 Exemplo. caso $n > m$: $p(x) = 5x^3+2x+3$ e $h(x) = -x^2-2x-3$, então $p(x)+h(x) = 5x^3-x^2$. Logo, $\partial[p(x)+h(x)] = 3 = \textit{máx.}\{\partial[p(x)];\ \partial[h(x)]\}$.

1.31 Exemplo. caso $n = m$: $p(x) = 5x^7+3x^5-7x^2+2$ e $h(x) = 2x^7+2x^6+7x^2+4$, então $p(x)+h(x) = 7x^7+2x^6+3x^5+6$. Logo, $\partial[p(x)+h(x)] = 7 \leq \textit{máx.}\{\partial[p(x)];\ \partial[h(x)]\}$.

1.32 Exemplo. caso $n = m$: $p(x) = 5x^{10}+2x^3+3$ e $h(x) = -5x^{10}+2x^2+3x+5$, então $p(x)+h(x) = 2x^3+2x^2+3x+8$. Logo, $\partial[p(x)+h(x)] = 3 \leq \textit{máx.}\{\partial[p(x)];\ \partial[h(x)]\}$.

1.1.4 Grau da Multiplicação de Dois Polinômios

1.33 Proposição. *Dados dois polinômios, $p(x)$ e $h(x)$, não nulos, então:*

$$\partial[p(x)\cdot h(x)] = \partial[p(x)] + \partial[h(x)].$$

Demonstração. Sejam dois polinômios $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} +\ ...\ + a_2x^2 + a_1x + a_0$ e $h(x) = b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ ...\ +b_2x^2+b_1x+b_0$, tais que, $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$, então $\partial[p(x)] = n$ e $\partial[h(x)] = m$. Sendo assim: $p(x)\cdot h(x) = a_nb_mx^{n+m} + (a_{n-1}b_m + a_nb_{m-1})x^{n+m-1} +\ ...\ + (a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+(a_1b_0+a_0b_1)x+a_0b_0$, mas como $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$, então $a_n\cdot b_m \neq 0$ e, consequentemente, o $\partial[p(x)\cdot h(x)] = n+m = \partial[p(x)]+\partial[h(x)]$. □

1.34 Exemplo. Dados $p(x) = 5x^3+3$, de $\partial[p(x)] = 3$ e $h(x) = 3x^2+5x+6$, de $\partial[h(x)] = 2$. Portanto, $p(x)\cdot h(x) = 15x^5+25x^4+30x^3+9x^2+15x+18$, cujo $\partial[p(x)\cdot h(x)] = 5 = n+m$.

Observação: Embora alguns autores definam o grau de um polinômio nulo como sendo $-\infty$, neste trabalho não definiremos o grau do referido polinômio.

1.35 Proposição. *Sejam os polinômios $p(x)$ e $h(x)$, não nulos, então*

$$p(x) \cdot h(x) \neq 0.$$

Demonstração. Dados dois polinômios,

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ ... \ + a_1 x + a_0 \ \text{ e} \\ h(x) &= b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ ... \ + b_1 x + b_0, \end{aligned}$$

ambos não nulos. Temos quatro casos a considerar: $p(x)$ e $h(x)$ são constantes; $p(x)$ é constante e $b(x)$ possui grau maior do que ou igual a um; $p(x)$ possui grau maior do que ou igual a um e $b(x)$ é constante e, por fim, $p(x)$ e $h(x)$ possuem grau maior do que ou igual a um. Porém, o segundo e terceiro casos são análogos. Sendo assim, verificaremos o primeiro, segundo e quarto casos:

Primeiro caso: $p(x)$ e $h(x)$ são constantes.

Por hipótese, $p(x)$ e $h(x)$ são constantes, não nulos, então $p(x) = a_0 \neq 0$ e $h(x) = b_0 \neq 0$. Donde, $a_0 \cdot b_0 \neq 0$.

Segundo caso: $p(x)$ é constante e $h(x)$ possui grau maior do que ou igual a um.

Por hipótese, $p(x)$ é constante, não nulo, ou seja, $\partial[p(x)] = 0$ e $h(x)$ não é constante, isto é, possui $\partial[h(x)] \geq 1$. Neste caso, como os polinômios não são nulos, então $\partial[p(x) \cdot h(x)] = \partial[p(x)] + \partial[h(x)] \geq 0 + 1 \Rightarrow \partial[p(x) \cdot h(x)] \geq 1$. Desta forma, temos que $p(x) \cdot h(x) \neq 0$, pois é de pelo menos grau 1.

Quarto caso: $p(x)$ e $h(x)$ possuem grau maior do que ou igual a um.

Por hipótese, $p(x)$ e $h(x)$ possuem grau maior do que ou igual a um, isto é, $\partial[p(x)] \geq 1$ e $\partial[h(x)] \geq 1$. Agora, como os polinômios não são nulos, então $\partial[p(x)\cdot h(x)] = \partial[p(x)] + \partial[h(x)] \geq 1 + 1 \Rightarrow \partial[p(x) \cdot h(x)] \geq 2$. Assim, temos que $p(x) \cdot h(x) \neq 0$, pois é de pelo menos grau 2. $\square$

1.2 Divisão Euclidiana de Polinômios

1.36 Teorema. *Dados dois polinômios, $p(x)$ e $d(x)$, não nulos, existe um, e somente um, par de polinômios $q(x)$ e $r(x)$, tal que:*

i) $p(x) \equiv d(x)q(x) + r(x)$;

ii) $\partial[r(x)] < \partial[d(x)]$ *ou* $r(x) \equiv 0$,

em que $p(x)$ é o dividendo, $d(x)$ o divisor, $q(x)$ o quociente e $r(x)$ o resto.

Demonstração. **Primeira parte:** Existência:

Se $p(x) = 0$ ou se $\partial[p(x)] < \partial[d(x)]$, então existem $q(x) = 0$ e $r(x) = p(x)$ que obedecem aos itens *i* e *ii* desse teorema.

Agora, vamos considerar $p(x)$ não nulo e $\partial[p(x)] \geq \partial[d(x)]$.

Sejam os polinômios $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ ... \ + a_1 x + a_0$ e

$d(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ ... \ + b_1 x + b_0$, tais que, $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$ e $n \geq m$.

Tome um polinômio $r_1(x)$ da seguinte forma: $r_1(x) = p(x) - \dfrac{a_n}{b_m}x^{n-m}d(x)$, (1) que vamos denominar por primeiro resto. Desta forma, o $\partial[r_1(x)] < \partial[p(x)]$, pois

$$r_1(x) = p(x) - \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}d(x) \Rightarrow$$

$$r_1(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 - \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}(b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ ... \ + b_1 x + b_0) \Rightarrow$$

$$r_1(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 - \frac{a_n x^n}{b_m x^m}\left[(b_m x^m) + (b_{m-1}x^{m-1} + \ ... \ + b_1 x + b_0)\right] \Rightarrow$$

$$r_1(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 - \left[\frac{a_n x^n}{b_m x^m}b_m x^m + \frac{a_n x^n}{b_m x^m}(b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0)\right] \Rightarrow$$

$$r_1(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 - \left[a_n x^n + \frac{a_n x^n}{b_m x^m}(b_{m-1}x^{m-1} + \ ... \ + b_1 x + b_0)\right] \Rightarrow$$

$$r_1(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 - a_n x^n - \left[\frac{a_n x^n}{b_m x^m}(b_{m-1}x^{m-1} + \ ... \ + b_1 x + b_0)\right] \Rightarrow$$

$r_1(x) = a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 - \left[\dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}(b_{m-1}x^{m-1} + \ ... \ + b_1 x + b_0)\right]$, ou seja, pelo menos o termo $a_n x^n$ é eliminado.

Considere q_1 como sendo o primeiro quociente, então

$p(x) = d(x)q_1(x) + r_1(x) \Rightarrow p(x) = d(x)q_1(x) + p(x) - \dfrac{a_n}{b_m}x^{n-m}d(x) \Rightarrow q_1(x) = \dfrac{a_n}{b_m}x^{n-m}.$

Agora, se $\partial[r_1(x)] < \partial[d(x)]$, então a existência está garantida e os termos

$q_1(x) = \dfrac{a_n}{b_m}x^{n-m}$ e $r_1(x)$ verificam os itens i e ii.

Se $\partial[r_1(x)] \geq \partial[d(x)]$ podemos representar $r_1(x)$ da seguinte maneira:

$r_1(x) = c_k x^k + c_{k-1}x^{k-1} + ... + c_1 x + c_0$, com $c_k \neq 0$ e $k \geq m$.

De forma análoga, podemos formar um polinômio r_2, tal que:

$r_2(x) = r_1(x) - \dfrac{c_k}{b_m}x^{k-m}d(x),\ (2)$ (no qual $\partial[r_2(x)] < \partial[r_1(x)]$, pois pelo menos o termo $c_k x^k$ é eliminado na equação (2)).

Agora, se $\partial[r_2(x)] < \partial[d(x)]$, então a existência está garantida e os termos

$q_1(x) + q_2(x)$, em que $q_2 = \dfrac{c_k}{b_m}x^{k-m}$ e $r_2(x)$ verificam os itens i e ii.

Se $\partial[r_2(x)] \geq \partial[d(x)]$ podemos representar $r_2(x)$:

$r_2(x) = e_r x^r + e_{r-1}x^{r-1} + ... + e_1 x + e_0$, no qual $e_r \neq 0$ e $k > r \geq m$.

De forma semelhante podemos formar um polinômio r_3, tal que:

$r_3(x) = r_2(x) - \dfrac{e_r}{b_m}x^{r-m}d(x),\ (3)$ (em que $\partial[r_3(x)] < \partial[r_2(x)]$, pois pelo menos o termo $e_r x^r$ é eliminado na equação (3)).

Agora, se $\partial[r_3(x)] < \partial[d(x)]$, então a existência está garantida e os termos

$q_1(x) + q_2(x) + q_3(x)$, no qual $q_3 = \dfrac{e_r}{b_m}x^{r-m}$ e $r_3(x)$ verificam os itens i e ii.

Se $\partial[r_3(x)] \geq \partial[d(x)]$ esse procedimento continua...

$r_4(x) = r_3(x) - q_4(x)d(x),\ (4)$

$\vdots$

$r_n(x) = r_{n-1}(x) - q_n(x)d(x),\ (n).$

Observe que os graus de $r_i(x)$ formam uma sequência decrescente no conjunto dos números naturais, ou seja, $\partial[r_1(x)] > \partial[r_2(x)] > ... > \partial[r_n(x)] > ....$

Consequentemente, existe um número natural n, tal que, $\partial[r_n(x)] < \partial[d(x)]$ ou $r_n(x) = 0$.

Logo, somando membro a membro as igualdades de 1 a n, temos:

$r_n(x) = p(x) - d(x)[q_1(x) + q_2(x) + \ ... \ + q_n(x)]$.

Os termos $q(x) = q_1(x) + q_2(x) \ + ... \ + q_n(x)$ e $r(x) = r_n(x)$ verificam i e ii, em que

$\partial[r_n(x)] < \partial[d(x)]$ ou $r_n(x) = 0$.

Segunda parte: Unicidade:

Pela primeira parte sabemos que existe um par $q(x)$ e $r(x)$, tal que, $p(x) \equiv d(x)q(x) + r(x)$ e $\partial[r(x)] < \partial[d(x)]$ ou $\partial[r(x)] \equiv 0$. Agora, vamos verificar que esse par é único. Suponha, por contradição, que existe outro par $q_1(x)$ e $r_1(x)$, em que,

$p(x) \equiv d(x)q_1(x) + r_1(x)$ e $\partial[r_1(x)] < \partial[d(x)]$ ou $\partial[r_1(x)] \equiv 0$.

Desta forma, temos:

$d(x)q(x) + r(x) \equiv d(x)q_1(x) + r_1(x) \Rightarrow d(x)[q(x) - q_1(x)] \equiv r_1(x) - r(x)$. Considere inicialmente que os dois membros dessa igualdade sejam não nulos, então:

$$\partial\{d(x)[q(x) - q_1(x)]\} \equiv \partial[r_1(x) - r(x)]. \tag{1.6}$$

Analisando a identidade 1.6, temos:

$$\partial\{d(x)[q(x) - q_1(x)]\} = \partial[d(x)] + \partial[q(x) - q_1(x)] \geq \partial[d(x)] \tag{1.7}$$

e

$$\partial[r_1(x) - r(x)] \leq \ max. \ \partial\{[r_1(x)], \ \partial[r(x)]\} < \partial[d(x)]. \tag{1.8}$$

Note que nas expressões 1.7 e 1.8 existe uma contradição, então na igualdade 1.6 os dois membros devem ser nulos. Porém, como $d(x)$ é não nulo, então $q(x) - q_1(x) \equiv 0 \Rightarrow q(x) \equiv q_1(x)$ e $r(x) - r_1(x) \equiv 0 \Rightarrow r(x) \equiv r_1(x)$. Concluímos assim a unicidade de $q(x)$ e $r(x)$. $\square$

O quociente e o resto da divisão de polinômios são obtidos aplicando o *Algoritmo de Euclides,* que é uma representação do procedimento utilizado na demonstração acima. Segue abaixo um exemplo:

1.37 Exemplo. Encontre o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$ na divisão de:

$p(x) = x^5 - 13x^4 + 65x^3 - 155x^2 + 174x - 72$ por $d(x) = x^2 - x - 2$.

Solução:

$$\begin{array}{ll|l}
p(x) \to & x^5-13x^4+65x^3-155x^2+174x-72 & x^2-x-2 \;\leftarrow d(x) \\ \cline{3-3}
-q_1(x)d(x) \to & \underline{-x^5 \;+\; x^4 \;+\; 2x^3} & x^3-12x^2+55x-124 \;\leftarrow q(x) \\
r_1(x) \;-----\to & -12x^4+67x^3-155x^2 & \uparrow \quad\; \uparrow \quad\; \uparrow \quad\; \uparrow \\
-q_2(x)d(x) ---\to & \underline{12x^4 \;-12x^3-\;24x^2} & q_1(x) \;\; q_2(x) \;\; q_3(x) \;\; q_4(x) \\
r_2(x) ----------\to & 55x^3-179x^2+174x & \\
-q_3(x)d(x) \;-----\to & \underline{-55x^3+\;55x^2+110x} & \\
r_3(x) ------------\to & -124x^2+284x-72 & \\
-q_4(x)d(x) \;---------\to & \underline{124x^2-124x-248} & \\
r_4(x) \;-----------------\to & 160x-320 \leftarrow r(x) &
\end{array}$$

Sendo assim, $q(x) = q_1(x) + q_2(x) + q_3(x) + q_4(x) \Rightarrow q(x) = x^3 - 12x^2 + 55x - 124$ e $r(x) = r_4(x) = 160x - 320$.

Note que:

$q_1(x)$ é obtido dividindo o maior grau de $p(x)$ pelo maior grau de $d(x)$;

$q_2(x)$ é obtido dividindo o maior grau de $r_1(x)$ pelo maior grau de $d(x)$;

$q_3(x)$ é obtido dividindo o maior grau de $r_2(x)$ pelo maior grau de $d(x)$;

$q_4(x)$ é obtido dividindo o maior grau de $r_3(x)$ pelo maior grau de $d(x)$;

$\partial[r_4(x)] < \partial[d(x)]$ e paramos a divisão.

Observação: $p(x)$ é divisível por $d(x)$ quando na divisão de $p(x)$ por $d(x)$ o resto for o polinômio nulo.

1.38 Corolário. *Considere os polinômios* $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ \dots\ + a_1 + a_0$ *e* $d(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ \dots\ + b_1 + b_0$, *tais que,* $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$, *de coeficientes inteiros e* $b_m = \pm 1$. *Assim, os polinômios quociente* $q(x)$ *e do resto* $r(x)$ *da Divisão Euclidiana de* $p(x)$ *por* $d(x)$ *possuem coeficientes inteiros.*

Demonstração. Por hipótese, os coeficientes de $p(x)$ e $d(x)$ são inteiros e pela demonstração da primeira parte do teorema 1.36 podemos notar que os coeficientes de $q(x)$ e $r(x)$ ou são números inteiros ou são frações cujos numerador é inteiro e denominador é b_m. Porém, $b_m = \pm 1$ e consequentemente os coeficientes de $q(x)$ e $r(x)$ são números inteiros. $\square$

1.39 Corolário. *Considere os polinômios* $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ \dots\ + a_1 + a_0$ *e* $d(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ \dots\ + b_1 + b_0$, *tais que,* $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$ *e de coeficientes* *racionais. Assim, os polinômios quociente $q(x)$ e do resto $r(x)$ da Divisão Euclidiana de $p(x)$ por $d(x)$ também possuem coeficientes racionais.*

Demonstração. Por hipótese, os coeficientes dos polinômios $p(x)$ e $d(x)$ são números racionais e observando a demonstração da primeira parte do teorema 1.36 podemos notar que os coeficientes de $q(x)$ e $r(x)$ são formados por somas, subtrações, produtos e divisões envolvendo os coeficientes de $p(x)$ e $d(x)$, ou seja, envolvendo números racionais. Assim, os coeficientes de $q(x)$ e $r(x)$ também são números racionais. $\square$

1.40 Corolário. *Considere os polinômios $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ \dots \ + a_1 + a_0$ e $d(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ \dots \ + b_1 + b_0$, tais que, $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$ e de coeficientes reais. Assim, os polinômios quociente $q(x)$ e do resto $r(x)$ da Divisão Euclidiana de $p(x)$ por $d(x)$ possuem coeficientes reais.*

Demonstração. O resultado segue de forma análoga ao corolário 1.39. $\square$

1.3 Método de Descartes para a Divisão de Polinômios

Considere os polinômios $p(x)$ e $d(x)$, tais que, $\partial[p(x)] \geq \partial[d(x)]$ e sejam $q(x)$ e $r(x)$, respectivamente, o quociente e o resto procurados.

Da *Divisão Euclidiana*, temos: $p(x) = d(x)q(x) + r(x) \Rightarrow \partial[p(x)] = \partial[d(x)q(x) + r(x)]$.

Porém, como $\partial[r(x)] < \partial[d(x)]$ ou $\partial[r(x)] \equiv 0$ podemos considerar que $\partial[p(x)] = \partial[d(x)q(x)]$ ou ainda, $\partial[p(x)] = \partial[d(x)] + \partial[q(x)]$.

Desta forma, sendo $q(x)$ e $r(x)$ procurados, temos:

i) $\partial[q(x)] = \partial[p(x)] - \partial[d(x)]$;

ii) $\partial[r(x)] < \partial[d(x)]$ ou $r(x) \equiv 0$.

O *Método de Descartes* consiste das seguintes etapas:

a) Identificar o grau de $q(x)$ e o grau máximo que $r(x)$ pode assumir;

b) Representar os coeficientes dos polinômios $q(x)$ e $r(x)$ através de incógnitas a serem encontradas;

c) Utilizar a identidade $p(x) = d(x)q(x) + r(x)$ e determinar as incógnitas de $q(x)$ e $r(x)$ procuradas.

1.41 Exemplo. Utilize o *Método de Descartes* e determine o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$ na divisão de $p(x) = x^5 + 3x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 5x + 6$ por $d(x) = x^2 - 5x + 6$.

Solução: Sabendo que $\partial[q(x)] = \partial[p(x)] - \partial[d(x)]$ e, neste caso, $\partial[p(x)] = 5$ e $\partial[d(x)] = 2$, então $\partial[q(x)] = 5 - 2 = 3$. Logo, o quociente é da forma: $q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Agora, como o $\partial[d(x)] = 2$, então o resto $r(x)$ assume, no máximo, um polinômio do primeiro grau, ou seja, $r(x) = mx + n$.

Portanto, $p(x) = d(x)q(x) + r(x) \Rightarrow$

$p(x) = (x^2 - 5x + 6)(ax^3 + bx^2 + cx + d) + mx + n \Rightarrow$

$p(x) = ax^5 - 5ax^4 + 6ax^3 + bx^4 - 5bx^3 + 6bx^2 + cx^3 - 5cx^2 + 6cx + dx^2 - 5dx + 6d + mx + n \Rightarrow$

$p(x) = ax^5 + (b-5a)x^4 + (c-5b+6a)x^3 + (6b-5c+d)x^2 + (6c-5d+m)x + 6d + n$. Porém, como $p(x) = x^5 + 3x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 5x + 6$ podemos igualando os termos semelhantes e montar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 5a = 3 \\ c - 5b + 6a = -7 \\ 6b - 5c + d = 2 \\ 6c - 5d + m = -5 \\ 6d + n = 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 5a = 3 \Rightarrow b = 3 + 5a = 3 + 5(1) \Rightarrow b = 8 \\ c - 5b + 6a = -7 \Rightarrow c = -7 + 5b - 6a = -7 + 5(8) - 6(1) \Rightarrow c = 27 \\ 6b - 5c + d = 2 \Rightarrow d = 2 + 5c - 6b = 2 + 5(27) - 6(8) \Rightarrow d = 89 \\ 6c - 5d + m = -5 \Rightarrow m = -5 + 5d - 6c = -5 + 5(89) - 6(27) \Rightarrow m = 278 \\ 6d + n = 6 \Rightarrow n = 6 - 6d = 6 - 6(89) \Rightarrow n = -528 \end{cases}.$$

Sendo assim, temos: $q(x) = x^3 + 8x^2 + 27x + 89$ e $r(x) = 278x - 528$.

Observação: O *Método de Descartes* para a divisão de polinômio, embora seja um tanto exaustivo por ser necessário resolver um sistema com várias equações e incógnitas, é mais intuitivo que outros métodos, tais como o *das Chaves* ou de *Briot-Ruffini.* (Consultar [1] e [5])

1.4 Teorema do Resto

1.42 Teorema (Do Resto). *O resto da divisão de um polinômio $p(x)$ por $x-\alpha$ é o valor numérico de $p(x)$ em α, dado por $p(\alpha)$.*

Demonstração. Pela *Divisão Euclidiana*, temos $p(x) = d(x)q(x) + r(x)$, no qual $q(x)$ é o quociente e $r(x)$ o resto da divisão de $p(x)$ por $d(x)$. Neste caso, como $d(x) = x - \alpha$, então $r(x)$ tem grau 0 ou é nulo. Logo, $r(x)$ é uma constante, que vamos representar por r. Sendo assim, $p(\alpha) = (\alpha - \alpha)q(x) + r \Rightarrow p(\alpha) = r$. □

1.43 Exemplo. UPE(2003)-O resto da divisão do polinômio $p(x) = \sum\limits_{n=1}^{40}(3n)(x+1)^{40-n}$ por $(x+2)$ é igual a:

(A) 0 (B) 20 (C) 820 (D) 60 (E) -30

Solução: Dado o polinômio $p(x) = \sum_{n=1}^{40}(3n)(x+1)^{40-n}$, que pode ser representado por $p(x) = 3(x+1)^{39} + 6(x+1)^{38} + \ \ldots\ + 117(x+1)^{1} + 120(x+1)^{0}$. Aplicando o *Teorema do Resto*, temos $p(-2) = 3(-2+1)^{39} + 6(-2+1)^{38} + \ \ldots\ + 117(-2+1)^{1} + 120(-2+1)^{0} \Rightarrow$ $p(x) = 3(-1)^{39} + 6(-1)^{38} + \ldots + 117(-1)^{1} + 120 \Rightarrow p(x) = -3+6-9+ \ldots -117+120$. Separando os termos negativos e positivos obtemos $(-3-9 \ldots -117)$ e $(6+12+18+ \ldots 120)$. Note que encontramos 20 termos negativos, 20 positivos e ambos estão em *Progressão Aritmética P.A.* Agora, calculando a soma dos termos das *P.A.'s*, separadamente, encontramos:

$$\frac{(-3-117)20}{2} = \frac{-120 \cdot 20}{2} = -1200 \quad \text{e} \quad \frac{(6+120)20}{2} = \frac{126 \cdot 20}{2} = 1260.$$

Portanto, $1260 - 1200 = 60$.

Resposta: Alternativa D.

1.5 Teorema De d'Alembert

1.44 Teorema (De d'Alembert). *Um polinômio $p(x)$ é divisível por $x-\alpha$ se, e somente se, $p(\alpha) = 0$, ou seja, α é raiz de $p(x)$.*

Demonstração. ($\Leftarrow$)

Hipótese: α é raiz de $p(x)$.

Tese: $p(x)$ é divisível por $x - \alpha$.

Como α é raiz de $p(x)$, então $p(\alpha) = 0$. Pela *Divisão Euclidiana* temos: $p(x) = (x-\alpha)q(x) + r(x)$, nos quais $q(x)$ é o quociente e $r(x)$ o resto da divisão de $p(x)$ por $x - \alpha$. Logo, $p(x) = (x-\alpha)q(x) + r(x) \Rightarrow p(\alpha) = (\alpha - \alpha)q(\alpha) + r(\alpha)$, mas $p(\alpha) = 0$, então $0 = (\alpha - \alpha)q(\alpha) + r(\alpha) \Rightarrow r(\alpha) = 0$. Donde, como $r(x) = r(\alpha) = 0$ concluímos que $p(x)$ é divisível por $x - \alpha$.

($\Rightarrow$)

Hipótese: $p(x)$ é divisível por $x - \alpha$.

Tese: α é raiz de $p(x)$.

Como $p(x)$ é divisível por $x - \alpha$, então $r(x) = 0$, no qual $r(x)$ é o resto da divisão de $p(x)$ por $d(x)$. Pelo *Teorema do Resto*, temos que $p(\alpha) = r(x)$, então $p(\alpha) = r(x) = 0$. Donde, α é raiz de $p(x)$. $\square$

1.45 Exemplo. COVEST(2008.1)-O polinômio $x^3 + ax + b$ tem coeficientes a e b reais e é divisível por $x + 1$ e por $x + 2$. Assim, é correto afirmar que:

A) $a = -7$ e $b = 6$

B) $a = -7$ e $b = -6$

C) $a = 7$ e $b = -6$

D) $a = 7$ e $b = 6$

E) $a = 6$ e $b = 7$

Solução: Como $x^3 + ax + b$ é divisível por $x + 1$, então -1 é raiz da equação $x^3 + ax + b = 0 \Rightarrow (-1)^3 + a(-1) + b = 0 \Rightarrow -1 - a + b = 0$.

De forma análoga, $x^3 + ax + b$ é divisível por $x + 2$, então -2 é raiz da equação $x^3 + ax + b = 0 \Rightarrow (-2)^3 + a(-2) + b = 0 \Rightarrow -8 - 2a + b = 0$.

Sendo assim, podemos montar e resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} b - a - 1 = 0 \\ b - 2a - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -b + a + 1 = 0 \\ b - 2a - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow -a - 7 = 0 \Rightarrow a = -7 \text{ e } -b + a + 1 = 0 \Rightarrow$$

$b = -7 + 1 \Rightarrow b = -6$.

Portanto, $a = -7$ e $b = -6$.

Resposta: Alternativa B.

1.6 Polinômio divisível por $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$

1.46 Teorema. *Um polinômio $p(x)$ é divisível, separadamente, por $x - \alpha_1$ e $x - \alpha_2$, com $\alpha_1 \neq \alpha_2$ se, e somente se, $p(x)$ é divisível pelo produto $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$.*

Demonstração. $(\Leftarrow)$

Hipótese: $p(x)$ é divisível por $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$.

Tese: $p(x)$ é divisível por $x - \alpha_1$ e por $x - \alpha_2$.

Da hipótese, $p(x)$ é divisível por $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$, então o resto $r(x)$ é zero, ou seja, $p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)q(x)$.

Note que quando $p(x)$ é dividido por $x - \alpha_1$ tem-se resto 0 e quando é dividido por $x - \alpha_2$ também tem-se resto 0. Logo, $p(x)$ é divisível, separadamente, por $x - \alpha_1$ e por $x - \alpha_2$.

$(\Rightarrow)$

Hipótese: $p(x)$ é divisível por $x - \alpha_1$ e por $x - \alpha_2$.

Tese: $p(x)$ é divisível por $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$.

Da hipótese, temos que $p(x)$ é divisível por $x - \alpha_1$ e por $x - \alpha_2$, então $p(\alpha_1) = 0$ e $p(\alpha_2) = 0$. Pelo teorema da *Divisão Euclidiana* $p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)q(x) + r(x)$. Observe que o divisor tem grau 2, então o resto $r(x)$ da divisão de $p(x)$ por $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$ tem grau nulo ou no máximo grau 1, ou seja, $r(x) = mx + n$. Desta forma, temos $p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)q(x) + mx + n$ e substituindo α_1 por x em $p(\alpha_1)$ e α_2 por x em $p(\alpha_2)$, obtemos:

$p(\alpha_1) = (\alpha_1 - \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_2)q(\alpha_1) + m\alpha_1 + n$ e $p(\alpha_2) = (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_2)q(\alpha_2) + m\alpha_2 + n$.

Porém, $p(x)$ é divisível por $x - \alpha_1$ e por $x - \alpha_2$, então $p(\alpha_1) = p(\alpha_2) = 0$. Donde,

$\begin{cases} m\alpha_1 + n = 0 \\ m\alpha_2 + n = 0 \end{cases}$ e resolvendo esse sistema encontramos $m = n = 0$.

Portanto, $r(x) = mx + n = 0$.

Concluímos que $p(x)$ é divisível por $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$. $\square$

Observação: O referido teorema pode ser generalizado por indução para um número finito de fatores $(x-\alpha_1)$, $(x-\alpha_2)$, $(x-\alpha_3)$, ... , $(x-\alpha_n)$, nos quais α_1, α_2, α_3, ... , α_n são distintos dois a dois. Logo, se um polinômio $p(x)$ é divisível, separadamente, por $x-\alpha_1$, $x-\alpha_2$, $x-\alpha_3$, ... , $x-\alpha_n$, com $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3 \neq$, ... , $\neq \alpha_n$, então $p(x)$ é divisível pelo produto $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$, ... , $(x-\alpha_n)$.

1.7 Polinômio divisível por $(x-\alpha)^2$

1.47 Teorema. *Um polinômio* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$*, com* $a_n \neq 0$ *é divisível por outro polinômio* $(x-\alpha)^2$*, se e somente se:*

i) $p(x)$ *é divisível por* $x-\alpha$*;*

ii) O quociente $q_1(x)$*, da divisão de* $p(x)$ *por* $x-\alpha$*, também é divisível por* $x-\alpha$*.*

Demonstração. $(\Leftarrow)$

Hipótese: $p(x)$ é divisível por $x-\alpha$ e $q_1(x)$ é divisível por $x-\alpha$.

Tese: $p(x)$ é divisível por $(x-\alpha)^2$.

Como $p(x)$ é divisível por $(x-\alpha)$, então podemos representar $p(x)$ da seguinte maneira $p(x) = (x-\alpha)q_1(x)$, mas o quociente $q_1(x)$ também é divisível por $x-\alpha$, então existe um $q_2(x)$, tal que, $q_1(x) = (x-\alpha)q_2(x)$. Portanto, $p(x) = (x-\alpha)q_1(x) \Rightarrow p(x) = (x-\alpha)(x-\alpha)q_2(x) \Rightarrow p(x) = (x-\alpha)^2q_2(x)$. Desta forma, concluímos que $p(x)$ é divisível por $(x-\alpha)^2$.

$(\Rightarrow)$

Hipótese: $p(x)$ é divisível por $(x-\alpha)^2$.

Tese: $p(x)$ é divisível por $x-\alpha$ e $q_1(x)$ é divisível por $x-\alpha$.

Como $p(x)$ é divisível por $(x-\alpha)^2$, então podemos representar $p(x)$ da seguinte maneira $p(x) = (x-\alpha)^2q_2(x)$, ou ainda, $p(x) = (x-\alpha)[(x-\alpha)q_2(x)]$. Logo, $p(x)$ é divisível por $(x-\alpha)$, cujo quociente $q_1(x)$ é $(x-\alpha)q_2(x)$. Desta forma, $q_1(x)$ também é divisível por $x-\alpha$, cujo quociente é $q_2(x)$. $\square$

De forma análoga, um polinômio $p(x)$ é divisível por outro polinômio $(x-\alpha)^3$, se e somente se:

i) $p(x)$ é divisível por $x-\alpha$;

ii) O quociente $q_1(x)$, da divisão de $p(x)$ por $x-\alpha$, também é divisível por $x-\alpha$;

iii) O quociente $q_2(x)$, da divisão de $q_1(x)$ por $x-\alpha$, também é divisível por $x-\alpha$.

Esse teorema pode ser generalizado para um divisor na forma $(x-\alpha)^m$.

1.48 Exemplo. IME(1975)-Dado o polinômio $2x^4+x^3+px^2+qx+2$, determine p e q de modo que seja divisível por $(x-1)^2$.

Solução: Como $x=1$ é raiz, então:

$$
\begin{array}{l|l}
2x^4 + x^3 + px^2 + qx + 2 & x-1 \\ \hline
\underline{-2x^4 + 2x^3} & 2x^3+3x^2+(p+3)x+p+q+3 \leftarrow q_1(x) \\
\quad 3x^3 + px^2 & \\
\quad \underline{-3x^3 + 3x^2} & \\
\qquad (p+3)x^2+qx & \\
\qquad \underline{-(p+3)x^2+(p+3)x} & \\
\qquad\qquad (p+q+3)x+2 & \\
\qquad\qquad \underline{-(p+q+3)x+p+q+3} & \\
\qquad\qquad\qquad p+q+5 \leftarrow r_1(x) &
\end{array}
$$

Agora, como $x=1$ é raiz dupla de $p(x)$, então $x=1$ é raiz simples de $q_1(x)$. Logo,

$$
\begin{array}{l|l}
2x^3+3x^2+(p+3)x+p+q+3 & x-1 \\ \hline
\underline{-2x^3+2x^2} & 2x^2+5x+p+8 \leftarrow q_2(x) \\
\quad 5x^2+(p+3)x & \\
\quad \underline{-5x^2 + 5x} & \\
\qquad (p+8)x+p+q+3 & \\
\qquad \underline{-(p+8)x+p+8} & \\
\qquad\qquad (2p+q+11) \leftarrow r_2(x) &
\end{array}
$$

Desta forma, como $q_1(x)$ é divisível por $x-1$, então $r_2(x)=0 \Rightarrow 2p+q+11=0$. Sabendo que $p(x)$ é divisível por $x-1$, então $r_1(x)=0 \Rightarrow p+q+5=0$. Portanto, podemos montar e resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2p+q+11=0 \\ p+q+5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2p+q+11=0 \\ -p-q-5=0 \end{cases} \Rightarrow p+6=0 \Rightarrow p=-6 \text{ e como } p+q+5=0,$$

então $-6+q+5=0 \Rightarrow q=1$.

Capítulo 2

Equações Algébricas

2.1 Definição. Denominamos por equação algébrica uma equação do tipo $p(x) = 0$, em que $p(x)$ é um polinômio. Desta forma, $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ ...\ + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, com $a_n \neq 0$, cujos coeficientes são números complexos e $n \in \mathbb{N}$, é uma equação algébrica de grau n.

2.1 Teorema Fundamental da Álgebra

A seguir enunciaremos o *Teorema Fundamental da Álgebra* que foi demonstrado em 1799 por *Gauss* (*Johann Carl Friedrich Gauss*, 1777 - 1855), em sua tese de doutorado. Gauss ficou reconhecido como príncipe da matemática pelo rei George V, de Hannover e também por ser considerado por muitos como o "maior gênio matemático" já existente.

2.2 Teorema (**Fundamental da Álgebra - *T.F.A***). *Todo polinômio de coeficientes complexos, de grau maior que 0, possui pelo menos uma raiz complexa.*

A demonstração desse teorema exige conhecimentos que fogem ao foco deste trabalho, por isso será aceito sem demonstração. O leitor mais interessado pode consultar [3] , [4] ou [6].

2.2 Decomposição de Polinômios

2.3 Teorema (**Da Decomposição de Polinômios**). *Considere um polinômio na forma* $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ ...\ + a_2x^2 + a_1x + a_0$, *com* $a_n \neq 0$. *Sendo assim,* $p(x)$ *pode ser* *representado por:*

$$p(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ ...\ (x-\alpha_n) = a_n\prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i),$$

nas quais $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ ...\ ,\ \alpha_n$, *são as suas* n *raízes complexas.*

Demonstração. Considere o polinômio $p(x)$ e decorre do *T.F.A.* que existe pelo menos uma raiz complexa α_1 de $p(x)$. Agora, pelo teorema da *Decomposição*, $p(x)$ pode ser denotado por $p(x) = (x-\alpha_1)p_1(x)$, no qual $p_1(x)$ é um polinômio de grau $n-1$ e de coeficiente dominante a_n. Novamente, pelo *T.F.A.,* o polinômio $p_1(x)$ possui pelo menos uma raiz complexa α_2 e pelo teorema da *Decomposição*, $p_1(x)$ pode ser exposto por $p_1(x) = (x-\alpha_2)p_2(x)$, no qual $p_2(x)$ é um polinômio de grau $n-2$ e cujo coeficiente dominante é a_n. Note que $p(x) = (x-\alpha_1)p_1(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)p_2(x)$. Agora, repetindo esse procedimento, de forma análoga n vezes, obtemos:
$p(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ ...\ (x-\alpha_n)p_n(x)$, no qual p_n é um polinômio de grau $n-n=0$ e coeficiente dominante a_n. Desta forma,

$$p_n = a_n \text{ e } p(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ ...\ (x-\alpha_n).$$

Concluímos que um polinômio $p(x)$, de grau $n > 0$, possui n raízes complexas e pode ser fatorado em n polinômios de grau 1. □

2.4 Exemplo. Decomponha o polinômio $p(x) = 2x^3 - 11x^2 + 17x - 6$ em fatores do primeiro grau, sabendo que 2 é raiz de $p(x)$.

Solução:

$$\begin{array}{r|l}
2x^3 - 11x^2 + 17x - 6 & x-2 \\ \cline{2-2}
\underline{-2x^3\ +\ 4x^2}\qquad\qquad & 2x^2-7x+3 \\
-7x^2 + 17x\qquad\ & \\
\underline{7x^2 - 14x}\qquad\ & \\
3x - 6 & \\
\underline{-3x + 6} & \\
0 &
\end{array}$$

Logo, $p(x) = (x-2)(2x^2-7x+3)$. Agora, resolvendo a equação $2x^2 - 7x + 3 = 0$ encontramos $1/2$ e 3 como raízes.

Portanto, $p(x) = (x-2)(2x^2-7x+3) \Rightarrow$
$p(x) = 2(x-2)(x-3)\left(x-\dfrac{1}{2}\right).$

2.5 Exemplo. A equação do primeiro grau:

Considere $ax + b = 0$, com a e b números complexos e $a \neq 0$. Sendo assim, temos: $ax+b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{a}$. Logo, a equação do primeiro grau tem uma única raiz, que vamos representar por α_1, ou seja, $\alpha_1 = -\dfrac{b}{a}$.

Note que $ax + b = a\left(x + \dfrac{b}{a}\right) = a\left[x - \left(-\dfrac{b}{a}\right)\right] = a(x - \alpha_1)$.

Concluímos que os polinômios do primeiro grau podem ser fatorados da seguinte forma:

$ax + b = a(x - \alpha_1)$, em que α_1 é raiz da equação $ax + b = 0$.

2.6 Exemplo. Fatoração da equação do segundo grau:

A fórmula para a solução de uma equação do segundo grau é conhecida por fórmula de Baskara, ou Baskara II (Bhaskara Akaria, também conhecido como Bhaskaracharya, 1114-1185). Ele foi professor, astrólogo, astrônomo e um dos mais importantes matemáticos do século XII. No Brasil, por volta de 1960 o nome de Bhaskara começou a ser dedicado à fórmula de resolução da equação do 2 grau. Não se vê essa nomeclatura em outros países, mesmo porque não foi ele quem a descobriu. Historicamente existem registros de sua existência cerca de 4000 anos antes, em textos escritos pelos babilônios.

Considere $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e c números complexos e $a \neq 0$. Sendo assim, temos:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Leftrightarrow$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Portanto, as raízes α_1 e α_2 da equação $ax^2 + bx + c = 0$ são:

$$\alpha_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Agora, calculando a soma e o produto das raízes, temos:

$\alpha_1 + \alpha_2 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \dfrac{-2b}{2a} \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = -\dfrac{b}{a}$ e

$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = \left(\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) \cdot \left(\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) = \left[\dfrac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}\right] \Rightarrow$

$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = \dfrac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \dfrac{4ac}{4a^2} \Rightarrow \alpha_1 \cdot \alpha_2 = \dfrac{c}{a}.$

Note que $ax^2+bx+c = a\left(x^2+\dfrac{bx}{a}+\dfrac{c}{a}\right) = a\left[x^2-(\alpha_1+\alpha_2)x+\alpha_1\alpha_2\right] =$

$a\left[x^2-\alpha_1 x-\alpha_2 x+\alpha_1\alpha_2\right] = a[x(x-\alpha_1)-\alpha_2(x-\alpha_1)] = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2).$

Concluímos que os polinômios do segundo grau podem ser fatorados da seguinte forma:

$ax^2+bx+c = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$, nas quais α_1 e α_2 são as raízes da equação $ax^2+bx+c=0$.

2.3 Polinômios Derivados

2.7 Definição. Considere o polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ \ldots\ + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0x^0$. Denominamos por *polinômio derivado* de $p(x)$ o polinômio $p'(x)$, tal que,

$$p'(x) = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-1-1} + \ \ldots\ + 2a_2x^{2-1} + 1a_1x^{1-1} + 0a_0x^{0-1} \Rightarrow$$

$$p'(x) = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ \ldots\ + 2a_2x + a_1.$$

Note que se o polinômio $p(x)$ for uma constante, então o polinômio $p'(x)$ é nulo.

Outra representação:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k \Rightarrow p'(x) = \sum_{k=1}^{n} ka_kx^{k-1}$$

2.8 Exemplo. Dado $p(x) = -3x^5 + 7x^3 + 2x^2 - x + 3 \Rightarrow$

$p'(x) = 5(-3)x^{5-1} + 3\cdot 7x^{3-1} + 2\cdot 2x^{2-1} + 1(-1)x^{1-1} + 0(3)x^{0-1} \Rightarrow$

$p'(x) = -15x^4 + 21x^2 + 4x - 1.$

2.9 Exemplo. Dado $p(x) = \sqrt{5}x^7 - \dfrac{3x^4}{7} + \dfrac{2x^2}{3} - \dfrac{\sqrt{3}x}{2} + 3 \Rightarrow$

$p'(x) = 7\sqrt{5}x^6 - \dfrac{12x^3}{7} + \dfrac{4x}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

2.3.1 Operações Básicas dos Polinômios Derivados

Considere os polinômios:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ ... \ + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0x^0, \\ h(x) &= b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ ... \ + b_2x^2 + b_1x^1 + b_0x^0 \quad \text{e} \\ t(x) &= c_w x^w + c_{w-1}x^{w-1} + \ ... \ + c_2x^2 + c_1x^1 + c_0x^0 \end{aligned}$$

com $a_n \cdot b_m \neq 0$, de coeficientes complexos, tais que, n e $m \geq 0$.

2.10 Proposição. ***Derivada da soma.***

Sejam $p(x)$ e $h(x)$, então

$$[p(x) + h(x)]' = p'(x) + h'(x).$$

Demonstração. Considere os polinômios

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \text{e} \quad h(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $n = m$. Nos casos em que $n > m$ os coeficientes de b_k, para $m < k \leq n$, são nulos, ou quando, $m > n$ os coeficientes de a_k, para $n < k \leq m$, são também nulos. Portanto, podemos somar os dois polinômios da seguinte maneira:

$$p(x) + h(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=0}^{n} b_k x^k = \sum_{k=0}^{n} \left(a_k x^k + b_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)x^k. \text{ Donde,}$$

$$[p(x) + h(x)]' = \left[\sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)x^k\right]' = \sum_{k=1}^{n} k(a_k + b_k)x^{k-1}. \tag{2.1}$$

Agora, por definição:

$$p'(x) = \textstyle\sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} \quad \text{e} \quad h'(x) = \sum_{k=1}^{n} k b_k x^{k-1}. \quad \text{Logo,}$$

$$p'(x) + h'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} k b_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \left(k a_k x^{k-1} + k b_k x^{k-1}\right) = \sum_{k=1}^{n} k(a_k + b_k)x^{k-1} \tag{2.2}$$

Sendo assim, analisando as equações 2.1 e 2.2 podemos ver que:

$$[p(x) + h(x)]' = p'(x) + h'(x).$$

□

2.11 Proposição. ***Derivada do produto de uma constante λ por $p(x)$.***

Considere o polinômio $p(x)$ e o número complexo $\lambda \in \mathbb{C}$. Desta forma, temos:

$$[\lambda p(x)]' = \lambda p'(x)$$

Demonstração. Seja $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, então $\lambda p(x) = \lambda \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda a_k x^k$. Donde,

$$[\lambda p(x)]' = \left[\sum_{k=0}^{n} \lambda a_k x^k\right]' = \sum_{k=1}^{n} \lambda k a_k x^{k-1}. \tag{2.3}$$

Agora, por definição:

$$p'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}, \text{ então } \lambda p'(x) = \lambda \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \lambda k a_k x^{k-1}. \tag{2.4}$$

Sendo assim, analisando as equações 2.3 e 2.4, podemos ver que

$$[\lambda p(x)]' = \lambda p'(x).$$

$\square$

2.12 Proposição. ***Derivada do produto.***

Dados dois polinômios $p(x)$ e $t(x)$, temos

$$[p(x) \cdot t(x)]' = p'(x) \cdot t(x) + p(x) \cdot t'(x).$$

Demonstração. Considere os polinômios

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \Rightarrow p'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} \quad \text{e} \\ t(x) &= \sum_{w=0}^{r} c_w x^w \Rightarrow t'(x) = \sum_{w=1}^{r} w c_w x^{w-1}. \end{aligned}$$

Desta forma,

$$[p(x) \cdot t(x)]' = \left[\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \cdot \sum_{w=0}^{r} c_w x^w\right]' = \left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{w=0}^{r} a_k x^k \cdot c_w x^w\right]' = \left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{w=0}^{r} a_k c_w x^{k+w}\right]',$$

donde,

$$[p(x) \cdot t(x)]' = \left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{w=0}^{r} a_k c_w x^{k+w}\right]' = \sum_{k=1}^{n}\sum_{w=1}^{r} (k+w) a_k c_w x^{k+w-1} \Rightarrow$$

$$[p(x) \cdot t(x)]' = \sum_{k=1}^{n}\sum_{w=1}^{r} \left(k a_k c_w x^{k+w-1} + w a_k c_w x^{k+w-1}\right) \Rightarrow$$

$$[p(x)\cdot t(x)]' = \sum_{k=1}^{n}\sum_{w=1}^{r} ka_k c_w x^{k+w-1} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{w=1}^{r} wa_k c_w x^{k+w-1} \Rightarrow$$

$$[p(x)\cdot t(x)]' = \sum_{k=1}^{n}\sum_{w=1}^{r} ka_k x^{k-1} c_w x^{w} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{w=1}^{r} a_k x^k w c_w x^{w-1} \Rightarrow$$

$$[p(x)\cdot t(x)]' = \sum_{k=1}^{n} ka_k x^{k-1} \cdot \sum_{w=0}^{r} c_w x^{w} + \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \cdot \sum_{w=1}^{r} w c_w x^{w-1}.$$

Portanto,

$$[p(x)\cdot t(x)]' = \sum_{k=1}^{n} ka_k x^{k-1} \cdot \sum_{w=0}^{r} c_w x^{w} + \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \cdot \sum_{w=1}^{r} w c_w x^{w-1} \Rightarrow$$

$$[p(x)\cdot t(x)]' = p'(x)\cdot t(x) + p(x)\cdot t'(x).$$

□

Observação: A proposição 2.12 pode ser generalizada por indução para vários polinômios, ou seja, considere os polinômios $t_1(x)$, $t_2(x)$, ..., $t_n(x)$, tais que,

$$p(x) = t_1(x)\cdot t_2(x)\cdot ...\cdot t_n(x), \quad \text{então}$$

$$[p(x)]' = [t_1(x)\cdot t_2(x)\cdot ...\cdot t_n(x)]' \Rightarrow$$

$$p'(x) = t_1'(x)\cdot t_2(x)\cdot ...\cdot t_n(x) + t_1(x)\cdot t_2'(x)\cdot ...\cdot t_n(x) + t_1(x)\cdot t_2(x)\cdot ...\cdot t_n'(x).$$

Demonstração. Como n é natural, aplicaremos o *Princípio da Indução Matemática.*

Para $n = 1:$ $p(x) = t_1(x) \Rightarrow [p(x)]' = [t_1(x)]' \Rightarrow p'(x) = t_1'(x)$ (verdadeira).

Vamos supor, por hipótese de indução, que o resultado vale para um n arbitrário:

$p(x) = t_1(x)\cdot t_2(x)\cdot ...\cdot t_n(x) \Rightarrow p'(x) = [t_1(x)\cdot t_2(x)\cdot ...\cdot t_n(x)]' \Rightarrow$

$[t_1(x)\cdot t_2(x)\cdot ...\cdot t_n(x)]' =$

$t_1'(x)\cdot t_2(x)\cdot ...\cdot t_n(x) + t_1(x)\cdot t_2'(x)\cdot ...\cdot t_n(x) + ... + t_1(x)\cdot t_2(x)\cdot ...\cdot t_n'(x).$

Vamos verificar o resultado para $n+1:$

$p(x) = t_1(x)\cdot t_2(x)\cdot ...\cdot t_n(x)\cdot t_{n+1}(x) \Rightarrow [p(x)]' = [t_1(x)\cdot t_2(x)\cdot ...\cdot t_n(x)\cdot t_{n+1}(x)]' \Rightarrow$

$[t_1(x)\cdot t_2(x)\cdot ...\cdot t_n(x)\cdot t_{n+1}(x)]' = \{[t_1(x)\cdot t_2(x)\cdot ...\cdot t_n(x)]\cdot [t_{n+1}(x)]\}' \Rightarrow$

$[t_1(x)\cdot t_2(x)\cdot ...\cdot t_n(x)\cdot t_{n+1}(x)]' = [t_1(x)\cdot t_2(x)\cdot ...\cdot t_n(x)]'\cdot [t_{n+1}(x)] + [t_1(x)\cdot t_2(x)\cdot ...\cdot$ $t_n(x)]\cdot [t_{n+1}(x)]'$. Mas, pela hipótese de indução, temos:

$[t_1(x) \cdot t_2(x) \cdot ... \cdot t_n(x) \cdot t_{n+1}(x)]' = [t_1'(x) \cdot t_2(x) \cdot ... \cdot t_n(x) + t_1(x) \cdot t_2'(x) \cdot ... \cdot t_n(x) + ... +$

$t_1(x) \cdot t_2(x) \cdot ... \cdot t_n'(x)] \cdot [t_{n+1}(x)] + [t_1(x) \cdot t_2(x) \cdot ... \cdot t_n(x)] \cdot [t_{n+1}(x)]' \Rightarrow$

$$[t_1(x) \cdot t_2(x) \cdot ... \cdot t_n(x) \cdot t_{n+1}(x)]' =$$

$$t_1'(x) \cdot t_2(x) \cdot ... \cdot t_n(x) \cdot t_{n+1}(x) + t_1(x) \cdot t_2'(x) \cdot ... \cdot t_n(x) \cdot t_{n+1}(x) + ... + t_1(x) \cdot t_2(x) \cdot ... \cdot$$

$$t_n'(x) \cdot t_{n+1}(x) + t_1(x) \cdot t_2(x) \cdot ... \cdot t_n(x) \cdot t_{n+1}'(x).$$

Desta forma, como o resultado é verdadeiro para $n + 1$, então pelo *Princípio da Indução Matemática:*

$$p(x) = t_1(x) \cdot t_2(x) \cdot ... \cdot t_n(x) \Rightarrow p'(x) = [t_1(x) \cdot t_2(x) \cdot ... \cdot t_n(x)]'.$$

$\square$

2.13 Proposição. ***Derivada da potência.***

Sejam os polinômios $p(x)$ e $h(x)$, tais que $p(x) = [h(x)]^n$. Sendo assim,

$$p'(x) = n[h(x)]^{n-1}h'(x)$$

Demonstração. Considere um polinômio $h(x)$, tal que:

$$p(x) = h_1(x) \cdot h_2(x) \cdot ... \cdot h_n(x) \Rightarrow p'(x) = [h_1(x) \cdot h_2(x) \cdot ... \cdot h_n(x)]'.$$

Aplicando a proposição anterior, temos:

$p'(x) = [h_1(x) \cdot h_2(x) \cdot ... \cdot h_n(x)]' = h_1'(x) \cdot h_2(x) \cdot ... \cdot h_n(x) + ... + h_1(x) \cdot h_2(x) \cdot ... \cdot h_n'(x)$

Tome $h_1(x) = h_2(x) = ... = h_n(x) = h(x)$, então:

$$p(x) = \underbrace{h(x) \cdot h(x) \cdot ... \cdot h(x)}_{n \text{ termos}} \Rightarrow$$

$$p'(x) = \underbrace{\underbrace{h'(x) \cdot h(x) \cdot ... \cdot h(x)}_{n \text{ termos}} + \underbrace{h(x) \cdot h'(x) \cdot ... \cdot h(x)}_{n \text{ termos}} + ... + \underbrace{h(x) \cdot h(x) \cdot ... \cdot h'(x)}_{n \text{ termos}}}_{n \text{ termos}} \Rightarrow$$

$$p'(x) = \underbrace{\underbrace{h'(x) \cdot h(x) \cdot ... \cdot h(x)}_{n \text{ termos}} + \underbrace{h'(x) \cdot h(x) \cdot ... \cdot h(x)}_{n \text{ termos}} + ... + \underbrace{h'(x) \cdot h(x) \cdot ... \cdot h(x)}_{n \text{ termos}}}_{n \text{ termos}} \Rightarrow$$

$$p'(x) = n\left[h'(x)\underbrace{h(x)\cdot ... \cdot h(x)}_{n-1}\right] \Rightarrow$$

$$p'(x) = nh'(x)\left[\underbrace{h(x)\cdot ... \cdot h(x)}_{n-1}\right] \Rightarrow$$

$$p'(x) = n[h(x)]^{n-1}h'(x). \qquad \square$$

2.3.2 Derivação Sucessiva

2.14 Definição. Denominamos por polinômio derivado de ordem n do polinômio $p(x)$, de notação $p^{(n)}(x)$, o polinômio da seguinte forma:

i) $p^{(0)}(x) = p(x)$

ii) $p^{(n+1)}(x) = [p^{(n)}(x)]'$.

Desta forma, temos:

$p^{(0)}(x) = p(x)$

$p^{(1)}(x) = p'(x)$, denominada por *primeira derivada*;

$p^{(2)}(x) = [p'(x)]' = p''(x)$, denominada por *segunda derivada*;

$p^{(3)}(x) = [p''(x)]'$, denominada por *terceira derivada*;

....

2.15 Exemplo. Considere o polinômio $p(x) = 3x^7 - 5x^6 + 2x^5 - 2x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 7x + 5$. Aplicando as derivações sucessivas, obtemos:

$p^{(0)}(x) = p(x) = 3x^7 - 5x^6 + 2x^5 - 2x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 7x + 5;$

$p^{(1)}(x) = p'(x) = 21x^6 - 30x^5 + 10x^4 - 8x^3 + 9x^2 + 10x - 7;$

$p^{(2)} = p''(x) = 126x^5 - 150x^4 + 40x^3 - 24x^2 + 18x + 10;$

$p^{(3)} = [p''(x)]' = 630x^4 - 600x^3 + 120x^2 - 48x + 18;$

$p^{(4)} = 2520x^3 - 1800x^2 + 240x - 48;$

$p^{(5)} = 7560x^2 - 3600x + 240;$

$p^{(6)} = 15120x - 3600;$

$p^{(7)} = 15120;$

$p^{(8)} = 0;$

$p^{(9)} = p^{(10)}(x) = p^{(11)}(x) = p^{(12)}(x) = ... = 0.$

2.3.3 Raízes Múltiplas

2.16 Definição. Considere o polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, com $a_n \neq 0$ e α raiz de $p(x)$. Sendo assim, α tem *multiplicidade* m se $p(x)$ puder ser representado por $p(x) = (x-\alpha)^m q(x)$, no qual $q(x)$ é um polinômio, tal que, $q(\alpha) \neq 0$, isto é, α não é raiz de $q(x)$. Em suma, a multiplicidade m de uma raiz α de um polinômio é o número m de vezes que essa raiz figura como raiz do polinômio. No caso em que $m = 1$ dizemos que α é raiz simples do polinômio.

2.17 Teorema (Das Raízes Múltiplas). *Se α for raiz de $p(x)$ com multiplicidade m, então α também é raiz de $p^{(1)}(x)$ com multiplicidade $m-1$, em que $p^{(1)}(x)$ é a primeira derivada de $p(x)$.*

Demonstração. Como α é raiz de $p(x)$ com multiplicidade $m > 1$, então $p(x)$ pode ser representado da seguinte forma: $p(x) = (x-\alpha)^m \cdot q(x)$, no qual $q(x)$ é um polinômio com $q(\alpha) \neq 0$. Pela *Regra da Cadeia e do Produto das Derivadas*, temos:

$p(x) = (x-\alpha)^m \cdot q(x) \Rightarrow$

$p^{(1)}(x) = [(x-\alpha)^m]' \cdot q(x) + (x-\alpha)^m [q(x)]' \Rightarrow$

$p^{(1)}(x) = m(x-\alpha)^{m-1} \cdot q(x) + (x-\alpha)^m \cdot q'(x) \Rightarrow$

$p^{(1)}(x) = (x-\alpha)^{m-1}[m \cdot q(x) + (x-\alpha) \cdot q'(x)].$

Tome $h(x) = m \cdot q(x) + (x-\alpha) \cdot q'(x)$. Logo, $p^{(1)}(x) = (x-\alpha)^{m-1}h(x)$. Agora, para provar que α é raiz de $p^{(1)}(x)$ de multiplicidade $m-1$, devemos mostrar que $h(\alpha) \neq 0$. Substituindo α em $h(x)$ temos $h(\alpha) = m \cdot q(\alpha) + (\alpha - \alpha) \cdot q'(\alpha)$ mas, por hipótese, $q(\alpha) \neq 0$, então $h(\alpha) = m \cdot q(\alpha) \neq 0$. Desta forma, concluímos que α é raiz de

$$p^{(1)}(x) = (x-\alpha)^{m-1}[m \cdot q(x) + (x-\alpha) \cdot q'(x)].$$

□

2.18 Corolário. *Se α for raiz com multiplicidade $m > 1$ do polinômio $p(x)$, então também é raiz dos polinômios $p^{(1)}(x)$, $p^{(2)}(x)$, $p^{(3)}(x)$, ... ,$p^{(m-1)}(x)$, com as respectivas multiplicidades $m-1$, $m-2$, $m-3$, ... , 1, porém, não é raiz de $p^{(m)}(x)$.*

2.19 Corolário. *Se α for raiz das equações $p(x) = 0$, $p^{(1)}(x) = 0$, $p^{(2)}(x) = 0$, ..., $p^{(m-1)}(x) = 0$ e α não é raiz de $p^{(m)}(x) = 0$, então α tem multiplicidade m.*

2.20 Exemplo. Considere o polinômio $p(x) = x^6 - 11x^5 + 44x^4 - 86x^3 + 89x^2 - 47x + 10 \Rightarrow$ $p(x) = (x-1)^4(x^2 - 7x + 10)$. Observe que $\alpha = 1$ é raiz de multiplicidade 4.

A primeira derivada de $p(x)$ é determinada por:

$p^{(1)}(x) = 6x^5 - 55x^4 + 176x^3 - 258x^2 + 178x - 47 \Rightarrow$

$p^{(1)}(x) = (x-1)^3(6x^2 - 37x + 47)$, que possui raiz 1 de multiplicidade 3;

A segunda derivada de $p(x)$ é determinada por:

$p^{(2)}(x) = 30x^4 - 220x^3 + 528x^2 - 516x + 178 \Rightarrow$

$p^{(2)}(x) = (x-1)^2(30x^2 - 160x + 178)$, que possui raiz 1 de multiplicidade 2;

A terceira derivada de $p(x)$ é determinada por:

$p^{(3)}(x) = 120x^3 - 660x^2 + 1056x - 516 \Rightarrow$

$p^{(3)}(x) = (x-1)(120x^2 - 540x + 516)$, que possui raiz 1 de multiplicidade 1.

Portanto, α é raiz do polinômio $p(x)$ de multiplicidade 4; é raiz do polinômio $p^{(1)}(x)$ de multiplicidade 3; é raiz do polinômio $p^{(2)}(x)$ de multiplicidade 2 e também é raiz do polinômio $p^{(3)}(x)$ de multiplicidade 1. Entretanto, não é raiz de $p^{(4)}(x)$.

Note que o exemplo dado é uma aplicação do corolário 2.18.

2.21 Exemplo. Encontre as raízes do polinômio $p(x) = x^4 - 3x^3 - 15x^2 - 17x - 6$, sabendo que $p(x)$ tem uma raiz tripla.

Solução: Seja α a raiz tripla procurada de $p(x)$, então será raiz dupla de $p^{(1)}(x)$ e será raiz simples de $p^{(2)}(x)$. Logo, derivando $p(x)$, temos:

$p(x) = x^4 - 3x^3 - 15x^2 - 17x - 6 \Rightarrow$

$p(x)^{(1)} = 4x^3 - 9x^2 - 30x - 17 \Rightarrow$

$p(x)^{(2)} = 12x^2 - 18x - 30$.

Resolvendo a equação $12x^2 - 18x - 30 = 0$ encontramos as raízes $x_1 = -1$ e $x_2 = 5/2$, que são as possibilidades para a raiz tripla de $p(x)$. Agora, substituindo essas raízes em $p(x)$, obtemos:

$p(-1) = (-1)^4 - 3(-1)^3 - 15(-1)^2 - 17(-1) - 6 \Rightarrow p(-1) = 0$ e

$p(5/2) = (5/2)^4 - 3(5/2)^3 - 15(5/2)^2 - 17(5/2) - 6 \Rightarrow p(5/2) = -2401/16$.

Portanto, vemos que -1 é a raiz tripla do polinômio $p(x)$, que pode ser representado da seguinte forma: $p(x) = (x+1)^3 d(x) = (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)d(x)$, no qual $d(x)$ é um polinômio. Como $p(x)$ tem grau 4, então $d(x)$ possui grau máximo 1, ou seja, $d(x)$ é da forma $d(x) = mx + n$. Aplicando o *Método de Descartes*, encontramos:

$(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)(mx + n) = x^4 - 3x^3 - 15x^2 - 17x - 6 \Leftrightarrow$

$mx^4 + nx^3 + 3mx^3 + 3nx^2 + 3mx^2 + 3nx + mx + n = x^4 - 3x^3 - 15x^2 - 17x - 6 \Leftrightarrow$

$mx^4 + (3m + n)x^3 + (3m + 3n)x^2 + (m + 3n)x + n = x^4 - 3x^3 - 15x^2 - 17x - 6$.

Agora, igualando os termos semelhantes, obtemos: $n = -6$ e $(m + 3n)x = -17x \Rightarrow m + 3n = -17 \Rightarrow m = -17 - 3n = -17 - 3(-6) = 1$. Donde, $d(x) = x - 6$, cuja raiz é 6. Sendo assim, o polinômio $p(x) = x^4 - 3x^3 - 15x^2 - 17x - 6$ tem quatro raízes, a saber, -1 e 6, respectivamente, com multiplicidades 3 e 1.

2.4 Raízes Conjugadas

2.22 Definição. Considere um número complexo representado por $w = a + bi$, com a e b números reais. Denominamos por conjugado do número w, o número $\overline{w}$, da seguinte forma $\overline{w} = a - bi$.

Para demonstrar o próximo teorema precisaremos das seguintes proposições acerca dos números complexos:

2.23 Proposição. *Dados dois números complexos* w_1, w_2 *e* $a \in \mathbb{R}$, *temos:*

i) $w_1 = \overline{w_1} \Leftrightarrow w_1 \in \mathbb{R}$;

ii) $\overline{w_1} + \overline{w_2} = \overline{w_1 + w_2}$;

iii) $\overline{w_1} \cdot \overline{w_2} = \overline{w_1 \cdot w_2}$;

iv) $a \cdot \overline{w_1} = \overline{a} \cdot \overline{w_1} = \overline{a \cdot w_1}$;

v) $(\overline{w_1})^n = \overline{(w_1^n)}$.

Demonstração. Os itens *i)* a *iv)* são aceitos sem demonstração.

Como n é natural, podemos aplicar o *Princípio da Indução Matemática* na proposição 2.23, *v)* .

Para $n = 0 \Rightarrow (\overline{w_1})^0 = \overline{(w_1^0)} \Rightarrow (\overline{1})^0 = \overline{(1^0)} \Rightarrow 1 = 1$ (verdadeira);

Tome, por hipótese, $(\overline{w_1})^n = \overline{(w_1^n)}$ e verificaremos se a equação $(\overline{w_1})^{n+1} = \overline{(w_1^{n+1})}$ é satisfeita.

Para $n + 1 \Rightarrow \underbrace{(\overline{w_1})^{n+1}}_{1} = \underbrace{\overline{(w_1^{n+1})}}_{2}$.

Agora, temos por (1): $(\overline{w_1})^{n+1} = (\overline{w_1})^n \cdot (\overline{w_1}) = (\overline{w_1})^n \cdot \overline{w_1}$ e por (2): $\overline{(w_1^{n+1})} = \overline{(w_1^n \cdot w_1)} = \overline{(w_1^n) \cdot (w_1)} = \overline{(w_1^n)} \cdot \overline{(w_1)} = \overline{(w_1^n)} \cdot \overline{w_1}$, mas por hipótese, $(\overline{w_1})^n = \overline{(w_1^n)}$, então, comparando 1 e 2, vemos que $(\overline{w_1})^{n+1} = \overline{(w_1^{n+1})}$. Desta maneira, concluímos pelo *Princípio da Indução Matemática* que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $(\overline{w_1})^n = \overline{(w_1^n)}$, com w_1 sendo um número complexo qualquer. □

2.24 Teorema (Das Raízes Conjugadas). *Considere um polinômio $p(x)$, de grau $n \geq 2$ e com* ***coeficientes reais****. Se o complexo $z = a + bi$, com a e $b \in \mathbb{R}$, for raiz de $p(x)$, então:*

i) O conjugado de z, $\overline{z} = a - bi$, também é raiz de $p(x)$;

ii) $\overline{z} = a - bi$ possui a mesma multiplicidade de z.

Demonstração i: Tome $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ \dots\ + a_2x^2 + a_1x + a_0$, com coeficientes reais e z raiz de $p(x)$. Logo, $p(z) = 0 \Rightarrow p(z) = a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_2z^2 + a_1z + a_0 = 0$. Agora, calculando $p(\overline{z})$, encontramos:

$p(\overline{z}) = a_n(\overline{z})^n + a_{n-1}(\overline{z})^{n-1} + \ \dots\ + a_2(\overline{z})^2 + a_1(\overline{z}) + a_0 \Rightarrow$

$p(\overline{z}) = \overline{a_n}(\overline{z})^n + \overline{a_{n-1}}(\overline{z})^{n-1} + ... + \overline{a_2}(\overline{z})^2 + \overline{a_1}(\overline{z}) + \overline{a_0} \Rightarrow$

$p(\overline{z}) = \overline{a_n}\overline{(z^n)} + \overline{a_{n-1}}\overline{(z^{n-1})} + ... + \overline{a_2}\overline{(z^2)} + \overline{a_1}\overline{(z)} + \overline{a_0} \Rightarrow$

$p(\overline{z}) = \overline{a_nz^n} + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + \ \dots\ + \overline{a_2z^2} + \overline{a_1z} + \overline{a_0} \Rightarrow$

$p(\overline{z}) = \overline{a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ \dots\ + a_2z^2 + a_1z + a_0} = \overline{p(z)}$. Porém, por hipótese $p(z) = 0$, então $\overline{p(z)} = \overline{0} = 0$. Portanto, $\overline{z}$ é raiz de $p(x)$.

Demonstração ii : Pelo item i, se $z = a+bi$ é raiz do polinômio $p(x)$ com coeficientes reais, então $\overline{z} = a - bi$ também será raiz de $p(x)$. Considere o polinômio $d(x) = (x-z)(x-\overline{z}) = (x-a-bi)(x-a+bi) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$, que neste caso é divisor de $p(x)$. Como a e b são números reais, então $d(x)$ tem coeficientes reais. Sendo $p(x)$ divisível por $d(x)$, então existe um polinômio quociente $q_1(x)$, tal que, $p(x) = d(x)q_1(x) = (x^2-2ax+a^2+b^2)q_1(x)$. Já que $p(x)$ e $d(x)$ possuem coeficientes reais, então $q_1(x)$ também tem coeficientes reais. Agora, se z é raiz de $q_1(x)$, então $\overline{z}$ também será raiz de $q_1(x)$. De forma análoga, seja o polinômio $d(x)$ divisor de $q_1(x)$, então existe um polinômio quociente $q_2(x)$, de forma que $q_1(x) = d(x)q_2(x)$. Note que $q_2(x)$ possui coeficientes reais. Novamente, se z é raiz de $q_2(x)$, então $\overline{z}$ também será raiz de $q_2(x)$. De forma similar, seja o polinômio $d(x)$ divisor de $q_2(x)$, então $q_2(x)$ pode ser exposto por $q_2(x) = d(x)q_3(x)$, no qual $q_3(x)$ é o polinômio quociente, com coeficientes reais, da divisão de $q_2(x)$ por $d(x)$. Repetimos esse procedimento até que z não seja raiz de q_{m+1}. Sendo assim, $\overline{z}$ também não será raiz de q_{m+1}, pois se $\overline{z}$ fosse raiz de q_{m+1}, então o conjugado de $\overline{z}$, ou seja, $\overline{(\overline{z})} = z$, seria raiz de q_{m+1}. Concluímos que z e $\overline{z}$ são raízes do polinômio $p(x)$, ambas com multiplicidade m. $\square$

Observação: *Seja um polinômio $p(x)$, de grau $n \geq 2$ e com coeficientes reais. O número de raízes imaginárias, se existirem, sempre é par, uma vez que, se z é raiz de $p(x)$, então $\overline{z}$ também será raiz de $p(x)$ e de mesma multiplicidade que z. Portanto, se $p(x)$ é um polinômio de grau ímpar e coeficientes reais, podemos afirmar que o número de raízes reais de $p(x)$ é ímpar. Em particular, ao menos uma raiz é real.*

2.25 Exemplo. UPE(2002)-Considere os complexos $z = 2 + i$ e $w = 1 + i$, em que i é a unidade imaginária, então o menor grau de um polinômio, com coeficientes reais que têm z e w como raízes, é:

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Solução: Como $z = 2+i$ é raiz de um polinômio com coeficientes reais, então o conjugado de z, $\overline{z} = 2 - i$, também será raiz. Da mesma forma que $w = 1 + i$ é raiz, então $\overline{w} = 1 - i$ também será raiz desse polinômio. Portanto, o polinômio tem pelo menos 4 raízes, ou seja, de pelo menos grau 4.

Resposta: Alternativa D.

2.26 Exemplo. ITA(2000)-Sendo 1 e $1+2i$ raízes da equação $x^3+ax^2+bx+c=0$, em que a, b e c são números reais, então

(A) $b+c=4$ (B) $b+c=3$ (C) $b+c=2$ (D) $b+c=1$ (E) $b+c=0$

Solução: Como os coeficientes da equação $x^3+ax^2+bx+c=0$ são reais e $1+2i$ é raiz, então $1-2i$ também será raiz. Portanto,

$x^3+ax^2+bx+c=(x-1-2i)(x-1+2i)(x-1) \Rightarrow$

$x^3+ax^2+bx+c=(x^2-x+2xi-x+1-2i-2xi+2i+4)(x-1) \Rightarrow$

$x^3+ax^2+bx+c=(x^2-2x+5)(x-1) \Rightarrow$

$x^3+ax^2+bx+c=(x^3-3x^2+7x-5).$

Agora, igualando os termos semelhantes, temos:

$ax^2=-3x^2 \Rightarrow a=-3$, $bx=7x \Rightarrow b=7$ e $c=-5$. Logo, $b+c=7=(-5)=2$.

Resposta: Alternativa C.

2.27 Exemplo. UFPE(2008-2)-Sabendo que $1+i$ é uma das raízes da equação $x^3-2x+a=0$, com a real, indique o valor de a.

Solução: A equação $x^3-2x+a=0$ possui coeficientes reais. Como $1+i$ é raiz, então $1-i$ também será raiz da equação dada. Seja α a terceira raiz procurada. Portanto,

$x^3-2x+a=(x-1-i)(x-1+i)(x-\alpha) \Rightarrow$

$x^3-2x+a=(x^2-x+xi-x+1-i-xi+i+1)(x-\alpha) \Rightarrow$

$x^3-2x+a=(x^2-2x+2)(x-\alpha) \Rightarrow$

$x^3+0x^2-2x+a=x^3-x^2\alpha-2x^2+2x\alpha+2x-2\alpha \Rightarrow$

$x^3+0x^2-2x+a=x^3+(-\alpha-2)x^2+(2\alpha+2)x-2\alpha.$

Agora, igualando os termos semelhantes, temos $0x^2=(-\alpha-2)x^2 \Rightarrow \alpha=-2$ e $a=-2\alpha=-2(-2)=4$. Logo, $a=4$.

2.5 Relações entre as Raízes de um Polinômio e seus Coeficientes

Relações de Girard: Iniciaremos os estudos das relações existentes entre os coeficientes de um polinômio $p(x)$, de grau $n > 1$ e suas raízes complexas. Tais correspondências foram estabelecidas por *Albert Girard* (1595-1632). Matemático francês, escreveu o livro *Invention nouvelle en l'algèbre* (1629) e realizou importantes contribuições nas áreas de álgebra, aritmética e trigonometria.

Antes da demonstração do caso geral, veremos alguns casos particulares.

Equação do segundo grau

Seja a equação polinomial $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, nos quais a_2, a_1 e a_0 são coeficientes complexos e $a_2 \neq 0$. Considere α_1 e α_2 suas raízes. Sendo assim,

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \Leftrightarrow$$

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2(x^2 - x \cdot \alpha_2 - x \cdot \alpha_1 + \alpha_1 \cdot \alpha_2) \Leftrightarrow$$

$$a_2\left(x^2 + \frac{a_1}{a_2}x + \frac{a_0}{a_2}\right) = a_2[x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)x + \alpha_1 \cdot \alpha_2] \Leftrightarrow$$

$$x^2 + \frac{a_1}{a_2}x + \frac{a_0}{a_2} = x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)x + \alpha_1 \cdot \alpha_2.$$

Agora, igualando os termos semelhantes, obtemos:

$$\frac{a_1}{a_2}x = -(\alpha_1 + \alpha_2)x \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{a_1}{a_2}$$

e

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = \frac{a_0}{a_2}.$$

2.28 Exemplo. Encontre a soma e o produto das raízes da equação $2x^2 - 7x + 8 = 0$.

Solução: Dada a equação $2x^2 - 7x + 8 = 0$, então $a_2 = 2$, $a_1 = -7$ e $a_0 = 8$. Portanto, a soma é obtida por $\alpha_1 + \alpha_2 = -\dfrac{a_1}{a_2} = -\left(\dfrac{-7}{2}\right) = \dfrac{7}{2}$ e o produto por $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = \dfrac{a_0}{a_2} = \dfrac{8}{2} = 4$.

Equação do terceiro grau

Seja a equação polinomial $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, nos quais a_3, a_2, a_1 e a_0 são coeficientes complexos e $a_3 \neq 0$. Considere α_1, α_2 e α_3 suas raízes. Sendo assim,

$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \Leftrightarrow$

$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3[x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)x + \alpha_1 \cdot \alpha_2](x - \alpha_3) \Leftrightarrow$

$a_3\left(x^3 + \dfrac{a_2}{a_3}x^2 + \dfrac{a_1}{a_3}x + \dfrac{a_0}{a_3}\right) =$

$a_3[x^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x^2 + (\alpha_1 \cdot \alpha_2 + \alpha_1 \cdot \alpha_3 + \alpha_2 \cdot \alpha_3)x - \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3] \Leftrightarrow$

$x^3 + \dfrac{a_2}{a_3}x^2 + \dfrac{a_1}{a_3}x + \dfrac{a_0}{a_3} = x^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x^2 + (\alpha_1 \cdot \alpha_2 + \alpha_1 \cdot \alpha_3 + \alpha_2 \cdot \alpha_3)x - \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3.$

Agora, igualando os termos semelhantes, temos:

$$\frac{a_2}{a_3}x^2 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x^2 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{a_2}{a_3};$$

$$\frac{a_1}{a_3}x = (\alpha_1 \cdot \alpha_2 + \alpha_1 \cdot \alpha_3 + \alpha_2 \cdot \alpha_3)x \Rightarrow \alpha_1 \cdot \alpha_2 + \alpha_1 \cdot \alpha_3 + \alpha_2 \cdot \alpha_3 = \frac{a_1}{a_3} \quad \text{e}$$

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 = -\frac{a_0}{a_3}.$$

2.29 Exemplo. UFPE(2004.2-MAT3)-Sejam α_1, α_2 e α_3 as raízes da equação polinomial $x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = 0$. Determine o polinômio $x^3 + ax^2 + bx + c$ que tem raízes $\alpha_1 \cdot \alpha_2$, $\alpha_1 \cdot \alpha_3$ e $\alpha_2 \cdot \alpha_3$ e indique o valor do produto $a \cdot b \cdot c$.

Solução: Dada a equação $x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = 0$, de raízes α_1, α_2 e α_3, então pelas *Relações de Girard* sabemos que:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -(-3) = 3 \\ \alpha_1 \cdot \alpha_2 + \alpha_1 \cdot \alpha_3 + \alpha_2 \cdot \alpha_3 = 6 \\ \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 = -(-1) = 1 \end{cases}.$$

Agora, aplicando novamente as *Relações de Girard* no polinômio $x^3 + ax^2 + bx + c$, de raízes $\alpha_1 \cdot \alpha_2$, $\alpha_1 \cdot \alpha_3$ e $\alpha_2 \cdot \alpha_3$, obtemos:

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdot \alpha_2 + \alpha_1 \cdot \alpha_3 + \alpha_2 \cdot \alpha_3 = -a \\ \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_3 + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 + \alpha_1 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 = b \quad \Rightarrow \\ \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 = -c \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6 = -a \\ (\alpha_1)^2 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 + \alpha_1 \cdot (\alpha_2)^2 \cdot \alpha_3 + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot (\alpha_3)^2 = b \quad \Rightarrow \\ (\alpha_1)^2 \cdot (\alpha_2)^2 \cdot (\alpha_3)^2 = -c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -6 \\ (\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = b \\ -(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3)^2 = c \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = -6 \\ b = (1)(3) = 3 \\ c = -(1)^2 = -1 \end{cases}.$$

Donde, $a \cdot b \cdot c = (-6)(3)(-1) = 18$.

Equação do quarto grau

Seja a equação polinomial $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, nos quais a_4, a_3, a_2, a_1 e a_0 são coeficientes complexos e $a_4 \neq 0$. Considere α_1, α_2, α_3 e α_4 suas raízes. De forma análoga às equações quadráticas e cúbicas, temos:

$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_4(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)$ e desenvolvendo os termos, encontramos:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = -\frac{a_3}{a_4};$$

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 + \alpha_1 \cdot \alpha_3 + \alpha_1 \cdot \alpha_4 + \alpha_2 \cdot \alpha_3 + \alpha_2 \cdot \alpha_4 + \alpha_3 \cdot \alpha_4 = \frac{a_2}{a_4};$$

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_4 + \alpha_1 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4 + \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4 = -\frac{a_1}{a_4} \quad \text{e}$$

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4 = \frac{a_0}{a_4}.$$

2.30 Exemplo. IME(1989)-Determine as raízes da equação $x^4 - 2x^3 - 31x^2 + 32x + 240 = 0$, sabendo que a soma de duas delas é 2.

Solução: Dada a equação $x^4 - 2x^3 - 31x^2 + 32x + 240 = 0$, de raízes a, b, c e d, então pelas *Relações de Girard* sabemos que:

$$\begin{cases} a + b + c + d = 2 \\ ab + ac + ad + bc + bd + cd = -31 \\ abc + abd + bcd + acd = -32 \\ abcd = 240 \end{cases}.$$

Porém, a soma de duas delas é 2. Considere então $a + b = 2 \Rightarrow b = 2 - a$. Sendo assim,

$$\begin{cases} (a+b)+c+d=2 \\ ab+ac+ad+bc+bd+cd=-31 \\ abc+abd+bcd+acd=-32 \\ abcd=240 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1)\ 2+c+d=2 \Rightarrow c+d=0 \Rightarrow d=-c. \\ (2)\ ab+ac+ad+bc+bd+cd=-31 \\ (3)\ abc+abd+bcd+acd=-32 \\ (4)\ abcd=240 \end{cases}.$$

Pela equação (3), temos:

$abc + abd + bcd + acd = -32 \Rightarrow abc + ab(-c) + bc(-c) + ac(-c) = -32 \Rightarrow abc - abc - bc^2 - ac^2 = -32 \Rightarrow -c^2(a+b) = -32 \Rightarrow -2c^2 = -32 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = \pm 4.$ Note que se $c = -4$, então $d = 4$ e vice-versa.

Agora, pela equação (4), temos:

$abcd = 240 \Rightarrow a(2-a)(-4)(4) = 240 \Rightarrow 2a - a^2 = -15 \Rightarrow a^2 - 2a - 15 = 0$ e resolvendo essa equação encontramos $a_1 = -3$ e $a_2 = 5$ como raízes, mas se $a_1 = -3 \Rightarrow b_1 = 5$ e, se $a_2 = 5 \Rightarrow b_2 = -3$.

Portanto, as raízes de $x^4 - 2x^3 - 31x^2 + 32x + 240 = 0$ são $\{-3,\ -4,\ 4, 5\}$.

Relações de Girard para um polinômio de grau n (generalização)

Seja a equação polinomial $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ ...\ + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, nos quais a_n, a_{n-1}, ... ,a_2, a_1 e a_0 são coeficientes complexos e $a_n \neq 0$. Considere α_1, α_2, ... , α_{n-1} e α_n suas raízes. De forma análoga às equações polinomiais já apresentadas, temos $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ ...\ + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ ...\ (x-\alpha_{n-1})(x-\alpha_n)$ e desenvolvendo os termos, encontramos:

$p(x) = a_nx^n - a_n(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+...+\alpha_{n-1}+\alpha_n)x^{n-1} + a_n(\alpha_1\cdot\alpha_2+\alpha_1\cdot\alpha_3+...+\alpha_{n-1}\cdot\alpha_n)x^{n-2} - a_n(\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3+\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_4+...+\alpha_{n-2}\cdot\alpha_{n-1}\cdot\alpha_n)x^{n-3} + ... + a_n(-1)^i(\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot...\cdot\alpha_{i-1}\cdot\alpha_i + \alpha_1\cdot\alpha_2\cdot...\cdot\alpha_{i-1}\cdot\alpha_{i+1} + \alpha_1\cdot\alpha_2\cdot...\cdot\alpha_{i-1}\cdot\alpha_n + \ ...\ + \alpha_{n-i+1}\cdot\alpha_{n-i+2}\cdot...\cdot\alpha_{n-1}\cdot\alpha_n)x^{n-i} + ... + (-1)^n a_n(\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3\cdot...\cdot\alpha_{n-1}\cdot\alpha_n)$.

Agora, aplicando a identidade, temos:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + ... + \alpha_{n-1} + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n};\ (1)$$

$$\alpha_1\cdot\alpha_2 + \alpha_1\cdot\alpha_3 + ... + \alpha_{n-1}\cdot\alpha_n = \frac{a_{n-2}}{a_n};\ (2)$$

$$\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3 + \alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_4 + ... + \alpha_{n-2}\cdot\alpha_{n-1}\cdot\alpha_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n};\ (3)$$

...

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot ... \cdot \alpha_{i-1} \cdot \alpha_i + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot ... \cdot \alpha_{i-1} \cdot \alpha_{i+1} + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot ... \cdot \alpha_{i-1} \cdot \alpha_n + \; ...$$

$$+\alpha_{n-i+1} \cdot \alpha_{n-i+2} \cdot ... \cdot \alpha_{n-1} \cdot \alpha_n = (-1)^i \left(\frac{a_{n-i}}{a_n}\right); \; (i)$$

$$...$$

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot ... \cdot \alpha_{n-1} \cdot \alpha_n = (-1)^n \left(\frac{a_0}{a_n}\right). \; (n)$$

Note que:

A identidade (1) relaciona os coeficientes da equação com a soma das raízes tomadas uma a uma;

A identidade (2) relaciona os coeficientes da equação com a soma dos produtos das raízes tomadas duas a duas;

A identidade (3) relaciona os coeficientes da equação com a soma dos produtos das raízes tomadas três a três;

A identidade (i) relaciona os coeficientes da equação com a soma dos produtos das raízes tomadas i a i;

A identidade (n) relaciona os coeficientes da equação com o produto das n raízes.

Observação: As *Relações de Girard* são muito úteis na resoluções das equações algébricas, mas apenas quando se tem alguma informação a respeito das raízes. As *Relações* por si só não são suficientes para determinar as raízes dessas equações, conforme veremos no exemplo abaixo.

2.31 Exemplo. Tome a equação $x^3 - 9x^2 + 24x - 20 = 0$ e considere a, b e c como sendo suas raízes. Logo:

$$\begin{cases} a+b+c=9 \\ a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c = 24 \\ a \cdot b \cdot c = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+c = 9-a \\ a \cdot (b+c) + b \cdot c - 24 = 0 \\ b \cdot c = \dfrac{20}{a} \end{cases} \Rightarrow a(9-a) + \frac{20}{a} - 24 = 0 \Rightarrow$$

$a^2(9-a) + 20 - 24a = 0 \Rightarrow a^3 - 9a^2 + 24a - 20 = 0$. Note que ao tentar resolver a equação dada aplicando as *Relações de Girard* chegamos na mesma equação, apenas com a mudança da incógnita. Isso ocorreu porque não foi dada nenhuma informação a respeito das raízes da equação e, consequentemente, não foi possível obter as raízes a, b e c.

Agora, vamos resolver esse mesmo exemplo sabendo que duas das raízes são iguais.

Vamos supor que $a = b$, então:

$$\begin{cases} a+a+c=9 \\ a\cdot a+a\cdot c+a\cdot c=24 \\ a\cdot a\cdot c=20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=9-2a \\ a^2+2a\cdot c-24=0 \end{cases} \Rightarrow a^2+2a(9-2a)-24=0 \Rightarrow$$

$a^2+18a-4a^2-24=0 \Rightarrow -3a^2+18a-24=0 \Rightarrow a^2-6a+8=0$. Resolvendo essa equação quadrática encontramos $a_1=2$ e $a_2=4$ como raízes. Substituindo esses valores nas outras equações do sistema vemos que $a=2$, $b=2$ e $c=5$.

2.6 Somas de Newton

2.32 Definição (Somas de Newton). Denominamos por *Soma de Newton* (*Isaac Newton* 1642-1716), a soma S_k, tal que,

$$S_k = \alpha_1^k + \alpha_2^k + ... + \alpha_{n-1}^k + \alpha_n^k,$$

em que $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$ e $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ são as raízes de um polinômio $p(x)$.

Agora, vamos encontrar um mecanismo para obter a soma S_k sem a necessidade de determinar, individualmente, as raízes do polinômio $p(x)$.

2.33 Teorema (Somas de Newton). *Considere um polinômio*

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ ... \ + a_2x^2 + a_1x + a_0 \text{ e a}$$

$$\textit{Soma de Newton } S_k = \alpha_1^k + \alpha_2^k + ... + \alpha_{n-1}^k + \alpha_n^k,$$

nas quais $\alpha_1, \ \alpha_2, \ ... \ , \alpha_n,$ são as raízes de $p(x)$. *Desta forma, temos:*

$$a_nS_k + a_{n-1}S_{k-1} + ... + a_1S_{k-n+1} + a_0S_{k-n} = 0.$$

Demonstração. Dado $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ e como $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ são suas raízes, então:

$$\begin{cases} p(\alpha_1)=0 \Rightarrow a_n\alpha_1^n + a_{n-1}\alpha_1^{n-1} + \ ... \ + a_2\alpha_1^2 + a_1\alpha_1 + a_0 = 0; \quad (1) \\ p(\alpha_2)=0 \Rightarrow a_n\alpha_2^n + a_{n-1}\alpha_2^{n-1} + \ ... \ + a_2\alpha_2^2 + a_1\alpha_2 + a_0 = 0; \quad (2) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad . \\ \qquad\qquad\qquad\qquad . \\ \qquad\qquad\qquad\qquad . \\ p(\alpha_n)=0 \Rightarrow a_n\alpha_n^n + a_{n-1}\alpha_n^{n-1} + \ ... \ + a_2\alpha_n^2 + a_1\alpha_n + a_0 = 0. \quad (n) \end{cases} .$$

Multiplicando por α_1^{k-n}, α_2^{k-n}, ..., α_n^{k-n}, respectivamente, as equações (1), (2), ..., (n), obtemos:

$$\begin{cases} (a_n\alpha_1^n + a_{n-1}\alpha_1^{n-1} + \ ... \ + a_2\alpha_1^2 + a_1\alpha_1 + a_0)\alpha_1^{k-n} = 0\alpha_1^{k-n} \\ (a_n\alpha_2^n + a_{n-1}\alpha_2^{n-1} + \ ... \ + a_2\alpha_2^2 + a_1\alpha_2 + a_0)\alpha_2^{k-n} = 0\alpha_2^{k-n} \\ \qquad\qquad . \qquad\qquad\qquad . \quad . \\ \qquad\qquad . \qquad\qquad\qquad . \quad . \\ \qquad\qquad . \qquad\qquad\qquad . \quad . \\ a_n\alpha_n^n + a_{n-1}\alpha_n^{n-1} \ + \ ... \ + a_2\alpha_n^2 + a_1\alpha_n + a_0)\alpha_n^{k-n} = 0\alpha_n^{k-n}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (a_n\alpha_1^n)\alpha_1^{k-n} + (a_{n-1}\alpha_1^{n-1})\alpha_1^{k-n} + \ ... \ + (a_2\alpha_1^2)\alpha_1^{k-n} + (a_1\alpha_1)\alpha_1^{k-n} + (a_0)\alpha_1^{k-n} = 0 \\ (a_n\alpha_2^n)\alpha_2^{k-n} + (a_{n-1}\alpha_2^{n-1})\alpha_2^{k-n} + \ ... \ + (a_2\alpha_2^2)\alpha_2^{k-n} + (a_1\alpha_2)\alpha_2^{k-n} + (a_0)\alpha_2^{k-n} = 0 \\ \qquad\qquad . \qquad\qquad\qquad . \quad . \\ \qquad\qquad . \qquad\qquad\qquad . \quad . \\ \qquad\qquad . \qquad\qquad\qquad . \quad . \\ (a_n\alpha_n^n)\alpha_n^{k-n} + (a_{n-1}\alpha_n^{n-1})\alpha_n^{k-n} + \ ... \ + (a_2\alpha_n^2)\alpha_n^{k-n} + (a_1\alpha_n)\alpha_n^{k-n} + (a_0)\alpha_n^{k-n} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_n\alpha_1^k + a_{n-1}\alpha_1^{k-1} + \ ... \ + a_2\alpha_1^{k-n+2} + a_1\alpha_1^{k-n+1} + a_0\alpha_1^{k-n} = 0 \\ a_n\alpha_2^k + a_{n-1}\alpha_2^{k-1} + \ ... \ + a_2\alpha_2^{k-n+2} + a_1\alpha_2^{k-n+1} + a_0\alpha_2^{k-n} = 0 \\ \qquad\qquad . \qquad\qquad\qquad . \quad . \\ \qquad\qquad . \qquad\qquad\qquad . \quad . \\ \qquad\qquad . \qquad\qquad\qquad . \quad . \\ a_n\alpha_n^k + a_{n-1}\alpha_n^{k-1} + \ ... \ + a_2\alpha_n^{k-n+2} + a_1\alpha_n^{k-n+1} + a_0\alpha_n^{k-n} = 0 \end{cases}.$$

Agora, somando essas equações, obtemos:

$$(+) : \begin{cases} a_n\alpha_1^k + a_{n-1}\alpha_1^{k-1} + \ ... \ + a_2\alpha_1^{k-n+2} + a_1\alpha_1^{k-n+1} + a_0\alpha_1^{k-n} = 0 \\ a_n\alpha_2^k + a_{n-1}\alpha_2^{k-1} + \ ... \ + a_2\alpha_2^{k-n+2} + a_1\alpha_2^{k-n+1} + a_0\alpha_2^{k-n} = 0 \\ \qquad\qquad . \qquad\qquad\qquad . \quad . \\ \qquad\qquad . \qquad\qquad\qquad . \quad . \\ \qquad\qquad . \qquad\qquad\qquad . \quad . \\ \underline{a_n\alpha_n^k + a_{n-1}\alpha_n^{k-1} + \ ... \ + a_2\alpha_n^{k-n+2} + a_1\alpha_n^{k-n+1} + a_0\alpha_n^{k-n} = 0} \end{cases} \Rightarrow$$

$$a_n(\underbrace{\alpha_1^k + \alpha_2^k + ... + \alpha_n^k}_{S_k}) \ + \ a_{n-1}(\underbrace{\alpha_1^{k-1} + \alpha_2^{k-1} + ... + \alpha_n^{k-1}}_{S_{k-1}}) \ + \ ... +$$

$$a_2(\underbrace{\alpha_1^{k-n+2}+\alpha_2^{k-n+2}+...+\alpha_n^{k-n+2}}_{S_{k-n+2}}) + a_1(\underbrace{\alpha_1^{k-n+1}+\alpha_2^{k-n+1}+...+\alpha_n^{k-n+1}}_{S_{k-n+1}}) +$$

$$a_0(\underbrace{\alpha_1^{k-n}+\alpha_2^{k-n}+ \ ... \ +\alpha_n^{k-n}}_{S_{k-n}}) = 0 \Rightarrow$$

$$a_nS_k + a_{n-1}S_{k-1} + ... + a_2S_{k-n+2} + a_1S_{k-n+1} + a_0S_{k-n} = 0. \qquad (2.5)$$

□

2.34 Exemplo. Considere a equação $2x^3 + 9x^2 + 7x - 6 = 0$, de raízes α_1, α_2 e α_3. Determine o valor de $\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3$.

Solução: Pela *Soma de Newton* vemos que $S_3 = \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3$ e pelo seu teorema temos $2S_3 + 9S_2 + 7S_1 - 6S_0 = 0$. Aplicando a *Soma de Newton* S_k e as *Relações de Girard* na equação dada, encontramos:

Para $S_0 = \alpha_1^0 + \alpha_2^0 + \alpha_3^0 = 3$;

Para $S_1 = \alpha_1^1 + \alpha_2^1 + \alpha_3^1 = -9/2$;

Para $S_2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$, mas $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) \Rightarrow$

$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2 = (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2-2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3) \Rightarrow \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2 = (-9/2)^2-2(7/2) \Rightarrow$

$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 53/4$. Sendo assim, temos:

$2S_3 + 9S_2 + 7S_1 - 6S_0 \Rightarrow 2S_3 + 9(53/4) + 7(-9/2) - 6(3) \Rightarrow S_3 = -279/8$.

2.35 Exemplo. Determine as raízes reais da equação $\sqrt[5]{1267 - x} + \sqrt[5]{x} = 7$

Solução: Aplicando o artifício de troca de variáveis podemos admitir que $a = \sqrt[5]{1267 - x} \Rightarrow a^5 = 1267 - x$ e $b = \sqrt[5]{x} \Rightarrow b^5 = x$. Logo, $a + b = 7$ e $a^5 = 1267 - b^5 \Rightarrow a^5+b^5 = 1267$. Agora, considere a e b como sendo as raízes da equação $y^2-(a+b)y+k = 0$, em que $k = a \cdot b$, ou seja, $y^2 - 7y + k = 0$. Aplicando a identidade 2.5 nessa equação obtemos: $S_k - 7S_{k-1} + kS_{k-2} = 0 \Rightarrow S_k = 7S_{k-1} - kS_{k-2}$.

Note que:

$S_0 = a^0 + b^0 = 1 + 1 = 2;$

$S_1 = a^1 + b^1 = 7$ e

$S_5 = a^5 + b^5 = 1267$, sendo assim, temos:

$S_2 = 7S_1 - kS_0 \Rightarrow$

$S_2 = 7(7) - k(2) \Rightarrow S_2 = 49 - 2k;$

$S_3 = 7S_2 - kS_1 \Rightarrow$

$S_3 = 7(49 - 2k) - k(7) \Rightarrow$

$S_3 = 343 - 14k - 7k \Rightarrow S_3 = 343 - 21k;$

$S_4 = 7S_3 - kS_2 \Rightarrow$

$S_4 = 7(343 - 21k) - k(49 - 2k) \Rightarrow$

$S_4 = 2401 - 147k - 49k + 2k^2 \Rightarrow$

$S_4 = 2k^2 - 196k + 2401;$

$S_5 = 7S_4 - kS_3 \Rightarrow$

$S_5 = 7(2k^2 - 196k + 2401) - k(343 - 21k) \Rightarrow$

$S_5 = 14k^2 - 1372k + 16807 - 343k + 21k^2 \Rightarrow$

$S_5 = 35k^2 - 1715k + 16807$, mas $S_5 = 1267$, então $35k^2 - 1715k + 16807 = 1267 \Rightarrow 35k^2 - 1715k + 15540 = 0 \Rightarrow k^2 - 49k + 444 = 0$. Resolvendo essa equação encontramos $k_1 = 12$ e $k_2 = 37$ como raízes. Desta forma, temos duas possibilidades para serem analisadas:

Primeira possibilidade: Para $k_1 = 12$, temos $y^2 - 7y + 12 = 0$, cujas raízes são $y_1 = a = 3$ e $y_2 = b = 4$ ou $y_1 = a = 4$ e $y_2 = b = 3$;

Segunda possibilidade: Para $k_2 = 37$, temos $y^2 - 7y + 37 = 0$, cujas raízes não são reais, pois o discriminante é negativo.

Já que estamos interessados na raízes reais, então:

$a = \sqrt[5]{1267 - x} \Rightarrow 3^5 = 1267 - x \Rightarrow x = 1024$ e $b = \sqrt[5]{x} \Rightarrow b = \sqrt[5]{1024} \Rightarrow b = 4$; ou

$a = \sqrt[5]{1267 - x} \Rightarrow 4^5 = 1267 - x \Rightarrow x = 243$ e $b = \sqrt[5]{x} \Rightarrow b = \sqrt[5]{243} \Rightarrow b = 3.$

Portanto, as soluções reais da equação $\sqrt[5]{1267-x}+\sqrt[5]{x}=7$ são $\{243,\ 1024\}$.

2.7 Raízes Irracionais

2.7.1 Raízes Irracionais na forma $c+d\sqrt{r}$

Nesta seção consideraremos os polinômios $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$, para os quais, os coeficientes são números racionais e $a_n\neq 0$. Estaremos interessados nas raízes de $p(x)$ na forma $a+b\sqrt{r}$, de modo que $a,b,r\in\mathbb{Q}$ e r não seja quadrado perfeito em $\mathbb{Q}$. Provaremos que as raízes de $p(x)$ do tipo $a+b\sqrt{r}$, aparecem em "pares conjugadas," isto é, demonstraremos que se $a+b\sqrt{r}$ for raiz de $p(x)$, então $a-b\sqrt{r}$ também é raiz de $p(x)$ e com a mesma multiplicidade. Para demonstrar esse resultado precisaremos dos lemas a seguir.

Considere nos lemas 2.37 ao 2.39 e no teorema 2.40 a seguir, n um número natural e c, d, f, g, f_n, g_n, r e s números racionais, de tal forma que $\sqrt{r}$ e $\sqrt{s}$ sejam números irracionais, isto é, r e s não são quadrados perfeitos. Sendo assim, temos:

2.36 Definição. Números quadrados perfeitos em $\mathbb{Q}$: Um número r é denominado por quadrado perfeito em $\mathbb{Q}$ se, existe um $k\in\mathbb{Q}$, tal que, $k^2=r$.

2.37 Lema. ***Sejam f, g, r, números racionais, no qual, r não seja quadrado perfeito. Assim,*** $\boldsymbol{f+g\sqrt{r}=0\Leftrightarrow f=g=0}$**.**

Demonstração. $(\Leftarrow)$

Hipótese: $f=g=0$.

Tese: $f+g\sqrt{r}=0$.

A demonstração é imediata: $0+0\sqrt{r}=0$.

$(\Rightarrow)$

Hipótese: $f+g\sqrt{r}=0$.

Tese: $f=g=0$.

Dado $f+g\sqrt{r}=0$, então $f+g\sqrt{r}=0\Leftrightarrow f=-g\sqrt{r}\Leftrightarrow -\dfrac{f}{g}=\sqrt{r}$. Note que se $f\neq 0$ e $g\neq 0$, então f/g representa um número racional, pois f e g são números racionais, então r é um quadrado perfeito, o que é um absurdo, pois, por hipótese, r não é quadrado perfeito. Portanto, $f + g\sqrt{r} = 0 \Leftrightarrow f = g = 0$. $\square$

2.38 Lema. ***Sejam c, d, r, números racionais, no qual, r não seja quadrado perfeito. Assim, existem f_n e g_n, também números racionais, tais que,***

$$(c + d\sqrt{r})^n = f_n + g_n\sqrt{r}.$$

Demonstração. Por simplicidade, vamos fazer a demonstração para o caso em que n é par. No caso em que n é ímpar é análogo. Assim, aplicando o *Binômio de Newton*, obtemos:

$$(c+d\sqrt{r})^n = \binom{n}{0}c^n + \binom{n}{1}c^{n-1}d\sqrt{r} + \binom{n}{2}c^{n-2}\left(d\sqrt{r}\right)^2 + \binom{n}{3}c^{n-3}\left(d\sqrt{r}\right)^3 + \\ + \binom{n}{4}c^{n-4}\left(d\sqrt{r}\right)^4 + \binom{n}{5}c^{n-5}\left(d\sqrt{r}\right)^5 + ... + \binom{n}{n}\left(d\sqrt{r}\right)^n \Rightarrow$$

$$(c+d\sqrt{r})^n = \binom{n}{0}c^n + \binom{n}{1}c^{n-1}d\sqrt{r} + \binom{n}{2}c^{n-2}d^2r + \binom{n}{3}c^{n-3}d^3r\sqrt{r} + \\ + \binom{n}{4}c^{n-4}d^4r^2 + \binom{n}{5}c^{n-5}d^5r^2\sqrt{r} + ... + \binom{n}{n}d^n\left(\sqrt{r}\right)^n \Rightarrow$$

$$(c+d\sqrt{r})^n = \binom{n}{0}c^n + d\binom{n}{1}c^{n-1}\sqrt{r} + d^2r\binom{n}{2}c^{n-2} + d^3r\binom{n}{3}c^{n-3}\sqrt{r} + \\ + d^4r^2\binom{n}{4}c^{n-4} + d^5r^2\binom{n}{5}c^{n-5}\sqrt{r} + ... + d^n\binom{n}{n}\left(\sqrt{r}\right)^n \Rightarrow$$

$$(c+d\sqrt{r})^n = \left[\binom{n}{0}c^n + d^2r\binom{n}{2}c^{n-2} + d^4r^2\binom{n}{4}c^{n-4} + ... + d^nr^{n/2}\binom{n}{n}\right] + \\ + \left[d\binom{n}{1}c^{n-1}\sqrt{r} + d^3r\binom{n}{3}c^{n-3}\sqrt{r} + d^5r^2\binom{n}{5}c^{n-5}\sqrt{r} + ... + d^{n-1}r^{n/2}\binom{n}{n-1}c\sqrt{r}\right] \Rightarrow$$

$$(c+d\sqrt{r})^n = \left[\binom{n}{0}c^n + d^2r\binom{n}{2}c^{n-2} + d^4r^2\binom{n}{4}c^{n-4} + ... + d^nr^{n/2}\binom{n}{n}\right] + \\ + \left[d\binom{n}{1}c^{n-1} + d^3r\binom{n}{3}c^{n-3} + d^5r^2\binom{n}{5}c^{n-5} + ... + d^{n-1}r^{n/2}\binom{n}{n-1}c\right]\sqrt{r}.$$

Note que as expressões internas nos dois colchetes representam números racionais, pois os números binomiais, c, d e r são todos números racionais. Desta forma, definindo

f_n e g_n, por:

$$\begin{cases} f_n = \binom{n}{0}c^n + d^2r\binom{n}{2}c^{n-2} + d^4r^2\binom{n}{4}c^{n-4} + ... + d^nr^{n/2}\binom{n}{n} \\ g_n = d\binom{n}{1}c^{n-1} + d^3r\binom{n}{3}c^{n-3} + d^5r^2\binom{n}{5}c^{n-5} + ... + d^{n-1}r^{n/2}\binom{n}{n-1}c \end{cases} \quad (2.6)$$

concluímos que $f_n + g_n\sqrt{r}$ representa um número irracional e que $(c+d\sqrt{r})^n = f_n + g_n\sqrt{r}$, para $f_n,\ g_n \in \mathbb{Q}$. □

2.39 Lema. ***Sejam c, d, r, números racionais, no qual, r não seja quadrado perfeito. Assim, existem f_n e g_n, também números racionais, tais que,***

$$(c + d\sqrt{r})^n = f_n + g_n\sqrt{r} \Leftrightarrow (c - d\sqrt{r})^n = f_n - g_n\sqrt{r}.$$

Demonstração. Novamente como foi feito no lema anterior, por simplicidade, faremos a demonstração para o caso em que n é par. No caso em que n é ímpar é análogo. Assim, aplicando o *Binômio de Newton*, obtemos:

$$\begin{aligned}(c - d\sqrt{r})^n = &\binom{n}{0}c^n - \binom{n}{1}c^{n-1}d\sqrt{r} + \binom{n}{2}c^{n-2}(d\sqrt{r})^2 - \binom{n}{3}c^{n-3}(d\sqrt{r})^3 + \\ &+ \binom{n}{4}c^{n-4}(d\sqrt{r})^4 - \binom{n}{5}c^{n-5}(d\sqrt{r})^5 + ... + \binom{n}{n}(d\sqrt{r})^n \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(c - d\sqrt{r})^n = &\binom{n}{0}c^n - \binom{n}{1}c^{n-1}d\sqrt{r} + \binom{n}{2}c^{n-2}d^2r - \binom{n}{3}c^{n-3}d^3r\sqrt{r} + \\ &+ \binom{n}{4}c^{n-4}d^4r^2 - \binom{n}{5}c^{n-5}d^5r^2\sqrt{r} + ... + \binom{n}{n}d^n(\sqrt{r})^n \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(c - d\sqrt{r})^n = &\binom{n}{0}c^n - d\binom{n}{1}c^{n-1}\sqrt{r} + d^2r\binom{n}{2}c^{n-2} - d^3r\binom{n}{3}c^{n-3}\sqrt{r} + \\ &+ d^4r^2\binom{n}{4}c^{n-4} - d^5r^2\binom{n}{5}c^{n-5}\sqrt{r} + ... + d^n\binom{n}{n}(\sqrt{r})^n \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(c - d\sqrt{r})^n = &\left[\binom{n}{0}c^n + d^2r\binom{n}{2}c^{n-2} + d^4r^2\binom{n}{4}c^{n-4} + ... + d^nr^{n/2}\binom{n}{n}\right] + \\ &+ \left[-d\binom{n}{1}c^{n-1}\sqrt{r} - d^3r\binom{n}{3}c^{n-3}\sqrt{r} - d^5r^2\binom{n}{5}c^{n-5}\sqrt{r} - ... - d^{n-1}r^{n/2}\binom{n}{n-1}c\sqrt{r}\right] \Rightarrow\end{aligned}$$

$$(c-d\sqrt{r})^n = \left[\binom{n}{0}c^n + d^2r\binom{n}{2}c^{n-2} + d^4r^2\binom{n}{4}c^{n-4} + ... + d^n r^{n/2}\binom{n}{n}\right] +$$
$$-\left[d\binom{n}{1}c^{n-1} + d^3r\binom{n}{3}c^{n-3} + d^5r^2\binom{n}{5}c^{n-5} + ... + d^{n-1}r^{n/2}\binom{n}{n-1}c\right]\sqrt{r}. \tag{2.7}$$

Portanto, $(c-d\sqrt{r})^n = f_n - g_n\sqrt{r}$.

Agora, fazendo a comparação da igualdade 2.7 com a igualdade 2.6 do lema 2.38 podemos ver que se $(c+d\sqrt{r})^n = f_n + g_n\sqrt{r}$, então $(c-d\sqrt{r})^n = f_n - g_n\sqrt{r}$ e vice-versa.

Concluímos que $(c+d\sqrt{r})^n = f_n + g_n\sqrt{r} \Leftrightarrow (c-d\sqrt{r})^n = f_n - g_n\sqrt{r}$, nos quais, $f_n,\ g_n \in \mathbb{Q}$. □

2.40 Teorema (**Raízes Irracionais na forma $\boldsymbol{c+d\sqrt{r}}$**). *Considere o polinômio $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, com $a_n \neq 0$, $n > 1$ e de* ***coeficientes racionais****. Considere também c, d, r, s, f_n e g_n números racionais, nos quais, r e s não sejam quadrados perfeitos. Sendo assim, temos que:*

i) Se $\alpha_1 = c+d\sqrt{r}$ for raiz de $p(x)$, então $c-d\sqrt{r}$ também é raiz de $p(x)$;

ii) $c-d\sqrt{r}$ possui a mesma multiplicidade de α_1.

iii) Se $\alpha_2 = c\sqrt{s}+d\sqrt{r}$ for raiz de $p(x)$, então $c\sqrt{s}-d\sqrt{r}$, $-c\sqrt{s}+d\sqrt{r}$ e $-c\sqrt{s}-d\sqrt{r}$ também são raízes de $p(x)$;

iv) $c\sqrt{s}-d\sqrt{r}$, $-c\sqrt{s}+d\sqrt{r}$ e $-c\sqrt{s}-d\sqrt{r}$ possuem, respectivamente, a mesma multiplicidade de α_2.

Demonstração. i : Como $c+d\sqrt{r}$ é raiz de $p(x)$, então $p\left(c+d\sqrt{r}\right) = 0$. Portanto, $p(c+d\sqrt{r}) = a_n\left(c+d\sqrt{r}\right)^n + a_{n-1}\left(c+d\sqrt{r}\right)^{n-1} + ... + a_1\left(c+d\sqrt{r}\right) + a_0 = 0$, mas pelo lema 2.38, temos $(c+d\sqrt{r})^n = f_n + g_n\sqrt{r}$. Logo,

$$p(c+d\sqrt{r}) = a_n\left(f_n+g_n\sqrt{r}\right) + a_{n-1}\left(f_{n-1}+g_{n-1}\sqrt{r}\right) + \ ... \ + a_1\left(f_1+g_1\sqrt{r}\right) + a_0 = 0 \Rightarrow$$
$$\text{''} \qquad = a_nf_n + a_ng_n\sqrt{r} + a_{n-1}f_{n-1} + a_{n-1}g_{n-1}\sqrt{r} + \ ... \ + a_1f_1 + a_1g_1\sqrt{r} + a_0 = 0 \Rightarrow$$
$$\text{''} \qquad = [a_nf_n + a_{n-1}f_{n-1} + ... + a_1f_1 + a_0] + [a_ng_n\sqrt{r} + a_{n-1}g_{n-1}\sqrt{r} + ... + a_1g_1\sqrt{r}] = 0 \Rightarrow$$
$$\text{''} \qquad = [a_nf_n + a_{n-1}f_{n-1} + ... + a_1f_1 + a_0] + [a_ng_n + a_{n-1}g_{n-1} + ... + a_1g_1]\sqrt{r} = 0,$$

mas pelo lema 2.37, obtemos:

$$a_nf_n + a_{n-1}f_{n-1} + ... + a_1f_1 + a_0 = 0 \text{ e } a_ng_n + a_{n-1}g_{n-1} + ... + a_1g_1 = 0. \tag{2.8}$$

De forma análoga, temos que

$p(c - d\sqrt{r}) = a_n\,(c - d\sqrt{r})^n + a_{n-1}\,(c - d\sqrt{r})^{n-1} + ... + a_1\,(c - d\sqrt{r}) + a_0$, mas pelo lema 2.39, temos $(c - d\sqrt{r})^n = f_n - g_n\sqrt{r}$. Logo,

$p(c - d\sqrt{r}) = a_n\,(f_n - g_n\sqrt{r}) + a_{n-1}\,(f_{n-1} - g_{n-1}\sqrt{r}) + \ ... \ + a_1\,(f_1 - g_1\sqrt{r}) + a_0 \Rightarrow$

" $\quad = a_nf_n - a_ng_n\sqrt{r} + a_{n-1}f_{n-1} - a_{n-1}g_{n-1}\sqrt{r} + \ ... \ + a_1f_1 - a_1g_1\sqrt{r} + a_0 \Rightarrow$

" $\quad = [a_nf_n + a_{n-1}f_{n-1} + ... + a_1f_1 + a_0] - [a_ng_n\sqrt{r} + a_{n-1}g_{n-1}\sqrt{r} + ... + a_1g_1\sqrt{r}] \Rightarrow$

" $\quad = [a_nf_n + a_{n-1}f_{n-1} + ... + a_1f_1 + a_0] - [a_ng_n + a_{n-1}g_{n-1} + ... + a_1g_1]\sqrt{r}$, entretanto pela equação 2.8, temos

$$a_nf_n + a_{n-1}f_{n-1} + ... + a_1f_1 + a_0 = 0$$

e

$$a_ng_n + a_{n-1}g_{n-1} + ... + a_1g_1 = 0.$$

Portanto, $p(c - d\sqrt{r}) = 0 + 0\sqrt{r} = 0$. Donde, $c - d\sqrt{r}$ é raiz de $p(x)$.

Demonstração de ii : Agora, sabemos que se $c + d\sqrt{r}$ é raiz de $p(x)$, então $c - d\sqrt{r}$ também é raiz de $p(x)$. Portanto, podemos representar $p(x)$ da seguinte forma:

$p(x) = (x - c - d\sqrt{r})(x - c + d\sqrt{r})q_1(x) = (x^2 - 2cx + c^2 - d^2r)q_1(x)$, no qual $q_1(x)$ é um polinômio. Porém, como c, d e r são números racionais, então os coeficientes do polinômio $x^2 - 2cx + c^2 - d^2r$ são números racionais. Desta maneira, como $p(x)$ tem coeficientes racionais, então $q_1(x)$ é um polinômio com coeficientes racionais. Agora, se existir outra raiz $c + d\sqrt{r}$ de $p(x)$, então $c - d\sqrt{r}$ também é raiz de $p(x)$. Portanto, $q_1(x)$ pode ser representado por $q_1(x) = (x - c - d\sqrt{r})(x - c + d\sqrt{r})q_2(x) = (x^2 - 2cx + c^2 - d^2r)q_2(x)$, no qual $q_2(x)$ é um polinômio. Entretanto, os coeficientes de $x^2 - 2cx + c^2 - d^2r$ são números racionais. Sendo assim, $q_2(x)$ é um polinômio com coeficientes racionais. Repetimos esse procedimento até que não exista raiz de q_{m+1} do tipo $c + d\sqrt{r}$. Desta forma, $c - d\sqrt{r}$ não será raiz de q_{m+1}, pois se $c - d\sqrt{r}$ for raiz de q_{m+1}, então $c + d\sqrt{r}$ seria raiz de q_{m+1}.

Concluímos que $c + d\sqrt{r}$ e $c - d\sqrt{r}$ são raízes do polinômio $p(x)$, ambas com multiplicidade m.

Observação: Num polinômio de coeficientes racionais o número de raízes irracionais, se existirem, aparecerão aos pares.

Para demonstrar o item *iii* uma maneira é aplicar o fato que $c\sqrt{s} + d\sqrt{r} = 0$, se e somente se, $c = d = 0$ e para constatar esse resultado pode-se elevar os dois lados da identidade ao quadrado. Em seguida, a demonstração segue de forma análoga ao item *i*. Agora para certificar o item *iv* verifique que

$$p(x) = (x - c\sqrt{s} - d\sqrt{r})(x - c\sqrt{s} + d\sqrt{r})(x + c\sqrt{s} - d\sqrt{r})(x + c\sqrt{s} + d\sqrt{r})q_1(x) \Rightarrow$$
$$p(x) = [x^4 + (2sc^2 - 2rd^2 - 4sc^2)x^2 - 2rsc^2d^2 + c^4s^2 + d^4r^2]q_1(x),$$

nos quais os coeficientes de $x^4 + (2sc^2 - 2rd^2 - 4sc^2)x^2 - 2rsc^2d^2 + c^4s^2 + d^4r^2$ são números racionais e $q_1(x)$ é um polinômio cujos coeficientes também são números racionais. Em seguida, a demonstração segue de forma análoga ao item *ii*. $\square$

2.41 Exemplo. Determine as raízes do polinômio $p(x) = 4x^4 - 24x^3 - 79x^2 + 18x + 57 = 0$, sabendo que uma das suas raízes é $3 - 2\sqrt{7}$.

Solução: Como $p(x)$ possui coeficientes racionais e $3 - 2\sqrt{7}$ é raiz de $p(x)$, então $3 + 2\sqrt{7}$ também é raiz de $p(x)$. Logo, existe um polinômio $h(x)$, tal que,

$$p(x) = (x - 3 + 2\sqrt{7})(x - 3 - 2\sqrt{7})h(x) = (x^2 - 6x - 19)h(x).$$

Agora, dividindo $p(x)$ por $x^2 - 6x - 19$, encontramos:

$$h(x) = 4x^2 - 3$$

e resolvendo essa equação obtemos $x_1 = -\sqrt{3}/2$ e $x_2 = \sqrt{3}/2$ como raízes.

Portanto, as raízes de $p(x) = 4x^4 - 24x^3 - 79x^2 + 18x + 57 = 0$ são:

$\{3 - 2\sqrt{7},\ 3 + 2\sqrt{7},\ -\sqrt{3}/2,\ \sqrt{3}/2\}$.

2.42 Exemplo. Determine as raízes do polinômio $p(x) = x^6 - x^4 - 89x^2 + 9 = 0$, sabendo que uma das suas raízes é $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Solução: Como $p(x)$ possui coeficientes racionais e $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é raiz de $p(x)$, então $\sqrt{2} - \sqrt{3}$, $-\sqrt{2} + \sqrt{3}$ e $-\sqrt{2} - \sqrt{3}$ também são raízes de $p(x)$. Logo, existe um polinômio $h(x)$, tal que,

$$p(x) = (x - \sqrt{2} - \sqrt{3})(x - \sqrt{2} + \sqrt{3})(x + \sqrt{2} - \sqrt{3})(x + \sqrt{2} + \sqrt{3})h(x) \Rightarrow$$
$$p(x) = (x^4 - 10x^2 + 1)h(x).$$

Agora, dividindo $p(x)$ por $x^4 - 10x^2 + 1$, encontramos:

$$h(x) = x^2 + 9$$

e resolvendo essa equação obtemos $x_1 = -3i$ e $x_2 = 3i$ como raízes. Portanto, as raízes de $p(x) = x^6 - x^4 - 89x^2 + 9 = 0$ são:

$$\{-3i,\ 3i,\ \sqrt{2} + \sqrt{3},\ \sqrt{2} - \sqrt{3},\ -\sqrt{2} + \sqrt{3},\ -\sqrt{2} - \sqrt{3}\}.$$

2.7.2 Raízes Irracionais na forma $c + d\sqrt[3]{r}$

Nesta seção consideraremos os polinômios $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, para os quais, os coeficientes são números racionais e $a_n \neq 0$. Estaremos interessados nas raízes de $p(x)$ na forma $a + b\sqrt[3]{r}$, de modo que $a, b, r \in \mathbb{Q}$ e r não seja cubo perfeito em $\mathbb{Q}$. Provaremos que se $a + b\sqrt[3]{r}$ é raiz de $p(x)$, então $a + b\omega\sqrt[3]{r}$ e $a + b\omega^2\sqrt[3]{r}$ também são raízes de $p(x)$, em que $\omega = (-1 + \sqrt{3}i)/2$ e, respectivamente, com as mesmas multiplicidades de $a + b\sqrt[3]{r}$. Para demonstrar esse resultado precisaremos dos lemas a seguir.

Considere nos lemas 2.44 ao 2.48 e no teorema 2.49 a seguir, n um número natural e c, d, f, g, h, f_n, g_n, h_n e r números racionais, de tal forma que $\sqrt[3]{r}$ seja um número irracional, isto é, r não é cubo perfeito. Sendo assim, temos:

2.43 Definição. Números cúbicos perfeitos em $\mathbb{Q}$: Um número r é denominado por cubo perfeito em $\mathbb{Q}$ se, existe um $k \in \mathbb{Q}$, tal que, $k^3 = r$.

2.44 Lema. ***Sejam f, g, r, números racionais, no qual, r não seja cubo perfeito. Sendo assim,***

$$\boldsymbol{f + g\sqrt[3]{r} = 0 \Leftrightarrow f = g = 0.}$$

Demonstração. Dado $f + g\sqrt[3]{r} = 0$, então $f + g\sqrt[3]{r} = 0 \Leftrightarrow f = -g\sqrt[3]{r} \Leftrightarrow -\dfrac{f}{g} = \sqrt[3]{r}$. Note que se $f \neq 0$ e $g \neq 0$, então f/g representaria um número racional, pois f e g são números racionais, então r seria um cubo perfeito, o que é um absurdo, pois, por hipótese, r não é cubo perfeito. Portanto, $f + g\sqrt[3]{r} = 0 \Leftrightarrow f = g = 0$. $\square$

2.45 Lema. ***Sejam f, g, h, r, números racionais, no qual, r não seja cubo perfeito. Sendo assim,***

$$\boldsymbol{f + g\sqrt[3]{r} + h\sqrt[3]{r^2} = 0 \Leftrightarrow f = g = h = 0.}$$

Demonstração. ($\Leftarrow$)

Hipótese: $f = g = h = 0$.

Tese: $f + g\sqrt[3]{r} + h\sqrt[3]{r^2} = 0$.

A demonstração é imediata: $0 + 0\sqrt[3]{r} + 0\sqrt[3]{r^2} = 0$.

($\Rightarrow$)

Hipótese: $f + g\sqrt[3]{r} + h\sqrt[3]{r^2} = 0$.

Tese: $f = g = h = 0$.

$f + g\sqrt[3]{r} + h\sqrt[3]{r^2} = 0 \ (\cdot h\sqrt[3]{r^2}) \Rightarrow fh\sqrt[3]{r^2} + gh\sqrt[3]{r^3} + h^2\sqrt[3]{r^4} = 0 \Rightarrow$

$$ghr + h^2r\sqrt[3]{r} + fh\sqrt[3]{r^2} = 0. \tag{2.9}$$

$f + g\sqrt[3]{r} + h\sqrt[3]{r^2} = 0 \ [\cdot(-g\sqrt[3]{r})] \Rightarrow -fg\sqrt[3]{r} - g^2\sqrt[3]{r^2} - gh\sqrt[3]{r^3} = 0 \Rightarrow$

$$-ghr - fg\sqrt[3]{r} - g^2\sqrt[3]{r^2} = 0. \tag{2.10}$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações 2.9 e 2.10, temos

$$\begin{cases} ghr + h^2r\sqrt[3]{r} + fh\sqrt[3]{r^2} = 0 \\ -ghr - fg\sqrt[3]{r} - g^2\sqrt[3]{r^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \ (+)$$

$(h^2r - fg)\sqrt[3]{r} + (fh - g^2)\sqrt[3]{r^2} = 0 \ (\div\sqrt[3]{r}) \Rightarrow$

$(h^2r - fg) + (fh - g^2)\sqrt[3]{r} = 0$. Agora, pelo lema 2.44 temos $h^2r - fg = 0$ e $fh - g^2 = 0$. Logo,

$$\begin{cases} h^2r - fg = 0 \ (\cdot h) \\ fh - g^2 = 0 \ (\cdot g) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -fgh + h^3r = 0 \\ fgh - g^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow g^3 - h^3r = 0 \Rightarrow g^3 = h^3r \Rightarrow$$

$\sqrt[3]{g^3} = \sqrt[3]{h^3r} \Rightarrow g = h\sqrt[3]{r} \Rightarrow g - h\sqrt[3]{r} = 0$. Novamente, aplicando o lema 2.44, temos $g = h = 0$. Entretanto, como $g = h = 0$, então:

$$f + g\sqrt[3]{r} + h\sqrt[3]{r^2} = 0 \Rightarrow f + 0\sqrt[3]{r} + 0\sqrt[3]{r^2} = 0 \Rightarrow f = 0,$$

como queríamos demonstrar. $\square$

2.46 Lema. ***Sejam c, d, r, números racionais, no qual, r não seja cubo perfeito. Assim, existem f_n, g_n, h_n, também números racionais, tais que:***

$$\boldsymbol{(c + d\sqrt[3]{r})^n = f_n + g_n\sqrt[3]{r} + h_n\sqrt[3]{r^2}.}$$

Demonstração. Aplicando o binômio de Newton em $(c + d\sqrt[3]{r})^n$, obtemos:

$$\begin{aligned}(c + d\sqrt[3]{r})^n = &\binom{n}{0}c^n + \binom{n}{1}c^{n-1}d\sqrt[3]{r} + \binom{n}{2}c^{n-2}\left(d\sqrt[3]{r}\right)^2 + \binom{n}{3}c^{n-3}\left(d\sqrt[3]{r}\right)^3 + \\ &+ \binom{n}{4}c^{n-4}\left(d\sqrt[3]{r}\right)^4 + \binom{n}{5}c^{n-5}\left(d\sqrt[3]{r}\right)^5 + \binom{n}{6}c^{n-6}\left(d\sqrt[3]{r}\right)^6 + ... + \binom{n}{n}\left(d\sqrt[3]{r}\right)^n \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(c + d\sqrt[3]{r})^n = &\binom{n}{0}c^n + \binom{n}{1}c^{n-1}d\sqrt[3]{r} + \binom{n}{2}c^{n-2}d^2\sqrt[3]{r^2} + \binom{n}{3}c^{n-3}d^3r + \\ &+ \binom{n}{4}c^{n-4}d^4r\sqrt[3]{r} + \binom{n}{5}c^{n-5}d^5r\sqrt[3]{r^2} + \binom{n}{6}c^{n-6}d^6r^2 + ... + \binom{n}{n}d^n\sqrt[3]{r^n} \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(c + d\sqrt[3]{r})^n = &\left[\binom{n}{0}c^n + \binom{n}{3}c^{n-3}d^3r + \binom{n}{6}c^{n-6}d^6r^2 + ...+\right] + \\ &+ \left[\binom{n}{1}c^{n-1}d\sqrt[3]{r} + \binom{n}{4}c^{n-4}d^4r\sqrt[3]{r} + ...+\right] + \\ &+ \left[\binom{n}{2}c^{n-2}d^2\sqrt[3]{r^2} + \binom{n}{5}c^{n-5}d^5r\sqrt[3]{r^2} + ...+\right] \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(c + d\sqrt[3]{r})^n = &\left[\binom{n}{0}c^n + \binom{n}{3}c^{n-3}d^3r + \binom{n}{6}c^{n-6}d^6r^2 + ...+\right] + \\ &+ \left[\binom{n}{1}c^{n-1}d + \binom{n}{4}c^{n-4}d^4r + ...+\right]\sqrt[3]{r} + \\ &+ \left[\binom{n}{2}c^{n-2}d^2 + \binom{n}{5}c^{n-5}d^5r + ...+\right]\sqrt[3]{r^2}.\end{aligned}$$

Note que as expressões internas nos três colchetes representam números racionais, pois os números binomiais, c, d e r são todos números racionais. Desta forma, podemos representar por f_n, g_n e h_n, respectivamente, a primeira, segunda e terceira expressões, isto é,

$$\left\{\begin{aligned} f_n &= \binom{n}{0}c^n + \binom{n}{3}c^{n-3}d^3r + \binom{n}{6}c^{n-6}d^6r^2 + ...+ \\ g_n &= \binom{n}{1}c^{n-1}d + \binom{n}{4}c^{n-4}d^4r + ...+ \\ h_n &= \binom{n}{2}c^{n-2}d^2 + \binom{n}{5}c^{n-5}d^5r + ...+ \end{aligned}\right. . \qquad (2.11)$$

Concluímos que $f_n + g_n\sqrt[3]{r} + h_n\sqrt[3]{r^2}$ representa um número irracional e que

$$\left(c + d\sqrt[3]{r}\right)^n = f_n + g_n\sqrt[3]{r} + h_n\sqrt[3]{r^2}, \tag{2.12}$$

para $f_n,\ g_n$ e $h_n \in \mathbb{Q}$. □

Para demonstrar os próximos dois lemas precisaremos das seguintes relações de ω :

$$\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2};$$

$$\omega^2 = \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2 = \frac{1-2\sqrt{3}i-3}{4} \Rightarrow \omega^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2};$$

$$\omega^3 = \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) = \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) \Rightarrow \omega^3 = 1.$$

Prosseguindo as multiplicações com ω podemos verificar que:

$$\omega^0 = \omega^3 = \omega^6 = \omega^9 = \omega^{12} = \omega^{3k} = 1;$$

$$\omega = \omega^4 = \omega^7 = \omega^{10} = \omega^{13} = \omega^{3k+1} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2};$$

$$\omega^2 = \omega^5 = \omega^8 = \omega^{11} = \omega^{14} = \omega^{3k+2} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \textit{ em que } k \in \mathbb{N}.$$

2.47 Lema. ***Sejam c, d, r, números racionais, no qual, r não seja cubo perfeito. Assim, existem f_n, g_n, h_n, também números racionais, tais que:***

$$\boldsymbol{(c + d\omega\sqrt[3]{r})^n = f_n + g_n\omega\sqrt[3]{r} + h_n\omega^2\sqrt[3]{r^2},}$$

em que, $\boldsymbol{\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}}$.

Demonstração. De forma semelhante como foi feito no lema 2.46, temos:

$$\left(c + d\omega\sqrt[3]{r}\right)^n = \binom{n}{0}c^n + \binom{n}{1}c^{n-1}d\omega\sqrt[3]{r} + \binom{n}{2}c^{n-2}\left(d\omega\sqrt[3]{r}\right)^2 + \binom{n}{3}c^{n-3}\left(d\omega\sqrt[3]{r}\right)^3 +$$
$$+\binom{n}{4}c^{n-4}\left(d\omega\sqrt[3]{r}\right)^4 + \binom{n}{5}c^{n-5}\left(d\omega\sqrt[3]{r}\right)^5 + \binom{n}{6}c^{n-6}\left(d\omega\sqrt[3]{r}\right)^6 + ... + \binom{n}{n}\left(d\omega\sqrt[3]{r}\right)^n \Rightarrow$$

$$\left(c + d\omega\sqrt[3]{r}\right)^n = \binom{n}{0}c^n + \binom{n}{1}c^{n-1}d\omega\sqrt[3]{r} + \binom{n}{2}c^{n-2}d^2\omega^2\sqrt[3]{r^2} + \binom{n}{3}c^{n-3}d^3\omega^3 r +$$
$$+\binom{n}{4}c^{n-4}d^4\omega^4 r\sqrt[3]{r} + \binom{n}{5}c^{n-5}d^5\omega^5 r\sqrt[3]{r^2} + \binom{n}{6}c^{n-6}d^6\omega^6 r^2 + ... + \binom{n}{n}d^n\omega^n\sqrt[3]{r^n}.$$

Utilizando as relações de ω encontramos

$$(c+d\omega\sqrt[3]{r})^n = \binom{n}{0}c^n + \binom{n}{1}c^{n-1}d\omega\sqrt[3]{r} + \binom{n}{2}c^{n-2}d^2\omega^2\sqrt[3]{r^2} + \binom{n}{3}c^{n-3}d^3r +$$
$$+\binom{n}{4}c^{n-4}d^4\omega r\sqrt[3]{r} + \binom{n}{5}c^{n-5}d^5\omega^2 r\sqrt[3]{r^2} + \binom{n}{6}c^{n-6}d^6r^2 + ... + \binom{n}{n}d^n\omega^n\sqrt[3]{r^n} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}(c+d\omega\sqrt[3]{r})^n &= \left[\binom{n}{0}c^n + \binom{n}{3}c^{n-3}d^3r + \binom{n}{6}c^{n-6}d^6r^2 + ...+\right] + \\ &+ \left[\binom{n}{1}c^{n-1}d\omega\sqrt[3]{r} + \binom{n}{4}c^{n-4}d^4\omega r\sqrt[3]{r} + ...+\right] + \\ &+ \left[\binom{n}{2}c^{n-2}d^2\omega^2\sqrt[3]{r^2} + \binom{n}{5}c^{n-5}d^5\omega^2 r\sqrt[3]{r^2} + ...+\right] \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(c+d\omega\sqrt[3]{r})^n &= \left[\binom{n}{0}c^n + \binom{n}{3}c^{n-3}d^3r + \binom{n}{6}c^{n-6}d^6r^2 + ...+\right] + \\ &+ \left[\binom{n}{1}c^{n-1}d + \binom{n}{4}c^{n-4}d^4r + ...+\right]\omega\sqrt[3]{r} + \\ &+ \left[\binom{n}{2}c^{n-2}d^2 + \binom{n}{5}c^{n-5}d^5r + ...+\right]\omega^2\sqrt[3]{r^2}.\end{aligned}$$

Agora, pelo sistema de equações 2.11 do lema 2.46, temos

$$\left(c+d\omega\sqrt[3]{r}\right)^n = f_n + g_n\omega\sqrt[3]{r} + h_n\omega^2\sqrt[3]{r^2}, \tag{2.13}$$

para $f_n,\ g_n$ e $h_n \in \mathbb{Q}$.

□

2.48 Lema. ***Sejam c, d, r, números racionais, no qual, r não seja cubo perfeito. Assim, existem f_n, g_n, h_n, também números racionais, tais que:***

$$\boldsymbol{(c+d\omega^2\sqrt[3]{r})^n = f_n + g_n\omega^2\sqrt[3]{r} + h_n\omega\sqrt[3]{r^2},}$$

em que, $\boldsymbol{\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}}$.

Demonstração. De forma análoga como foi feito no lema 2.47, temos:

$$(c+d\omega^2\sqrt[3]{r})^n = \binom{n}{0}c^n + \binom{n}{1}c^{n-1}d\omega^2\sqrt[3]{r} + \binom{n}{2}c^{n-2}\left(d\omega^2\sqrt[3]{r}\right)^2 + \binom{n}{3}c^{n-3}\left(d\omega^2\sqrt[3]{r}\right)^3 +$$
$$+\binom{n}{4}c^{n-4}\left(d\omega^2\sqrt[3]{r}\right)^4 + \binom{n}{5}c^{n-5}\left(d\omega^2\sqrt[3]{r}\right)^5 + \binom{n}{6}c^{n-6}\left(d\omega^2\sqrt[3]{r}\right)^6 + ... + \binom{n}{n}\left(d\omega^2\sqrt[3]{r}\right)^n \Rightarrow$$

$$(c+d\omega\sqrt[3]{r})^n = \binom{n}{0}c^n + \binom{n}{1}c^{n-1}d\omega^2\sqrt[3]{r} + \binom{n}{2}c^{n-2}d^2\omega^4\sqrt[3]{r^2} + \binom{n}{3}c^{n-3}d^3\omega^6 r +$$
$$+\binom{n}{4}c^{n-4}d^4\omega^8 r\sqrt[3]{r} + \binom{n}{5}c^{n-5}d^5\omega^{10}r\sqrt[3]{r^2} + \binom{n}{6}c^{n-6}d^6\omega^{12}r^2 + ... + \binom{n}{n}d^n\omega^{2n}\sqrt[3]{r^n}.$$

Utilizando as relações de ω encontramos

$$(c+d\omega\sqrt[3]{r})^n = \binom{n}{0}c^n + \binom{n}{1}c^{n-1}d\omega^2\sqrt[3]{r} + \binom{n}{2}c^{n-2}d^2\omega\sqrt[3]{r^2} + \binom{n}{3}c^{n-3}d^3r+$$
$$+\binom{n}{4}c^{n-4}d^4\omega^2r\sqrt[3]{r} + \binom{n}{5}c^{n-5}d^5\omega r\sqrt[3]{r^2} + \binom{n}{6}c^{n-6}d^6r^2 + ... + \binom{n}{n}d^n\omega^{2n}\sqrt[3]{r^n} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}(c+d\omega\sqrt[3]{r})^n = & \left[\binom{n}{0}c^n + \binom{n}{3}c^{n-3}d^3r + \binom{n}{6}c^{n-6}d^6r^2 + ...+\right] + \\ & + \left[\binom{n}{1}c^{n-1}d\omega^2\sqrt[3]{r} + \binom{n}{4}c^{n-4}d^4\omega^2r\sqrt[3]{r} + ...+\right] + \\ & + \left[\binom{n}{2}c^{n-2}d^2\omega\sqrt[3]{r^2} + \binom{n}{5}c^{n-5}d^5\omega r\sqrt[3]{r^2} + ...+\right] \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(c+d\omega\sqrt[3]{r})^n = & \left[\binom{n}{0}c^n + \binom{n}{3}c^{n-3}d^3r + \binom{n}{6}c^{n-6}d^6r^2 + ...+\right] + \\ & + \left[\binom{n}{1}c^{n-1}d + \binom{n}{4}c^{n-4}d^4r + ...+\right]\omega^2\sqrt[3]{r} + \\ & + \left[\binom{n}{2}c^{n-2}d^2 + \binom{n}{5}c^{n-5}d^5r + ...+\right]\omega\sqrt[3]{r^2}.\end{aligned}$$

Novamente, pelo sistema de equações 2.11 do lema 2.46, temos

$$\left(c+d\omega\sqrt[3]{r}\right)^n = f_n + g_n\omega^2\sqrt[3]{r} + h_n\omega\sqrt[3]{r^2}, \tag{2.14}$$

para algum $f_n,\ g_n$ e $h_n \in \mathbb{Q}$.

□

2.49 Teorema (Raízes Irracionais na forma $\boldsymbol{c+d\sqrt[3]{r}}$). *Considere o polinômio $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$, com $a_n \neq 0$, $n > 2$ e com* ***coeficientes racionais****. Considere também c, d e r números racionais, tal que, r não seja cubo perfeito. Desta maneira, temos que:*

i) Se $\alpha_1 = c + d\sqrt[3]{r}$ for raiz de $p(x)$, então $\alpha_2 = c + d\omega\sqrt[3]{r}$ e $\alpha_3 = c + d\omega^2\sqrt[3]{r}$ são raízes de $p(x)$, em que

$$\omega = \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) \ \text{e}\ \omega^2 = \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right);$$

ii) $c + d\omega\sqrt[3]{r}$ e $c + d\omega^2\sqrt[3]{r}$ possuem as mesmas multiplicidades de α_1.

Demonstração. i : Como $c + d\sqrt[3]{r}$ é raiz de $p(x)$, então $p(c + d\sqrt[3]{r}) = 0$. Sendo assim, temos:

$p\,(c+d\sqrt[3]{r}) = a_n\,(c+d\sqrt[3]{r})^n + \ ...\ + a_1\,(c+d\sqrt[3]{r}) + a_0 = 0$. Aplicando o lema 2.46, obtemos:

$$" \qquad = a_n(f_n + g_n\sqrt[3]{r} + h_n\sqrt[3]{r^2}) + \ ...\ + a_1(f_1 + g_1\sqrt[3]{r} + h_1\sqrt[3]{r^2}) + a_0 = 0 \Rightarrow$$

$$" \qquad = a_nf_n + a_ng_n\sqrt[3]{r} + a_nh_n\sqrt[3]{r^2} + \ ...\ + a_1f_1 + a_1g_1\sqrt[3]{r} + a_1h_1\sqrt[3]{r^2}) + a_0 = 0 \Rightarrow$$

$$" \qquad = a_nf_n + ... + a_1f_1 + a_0 + a_ng_n\sqrt[3]{r} + ... + a_1g_1\sqrt[3]{r} + a_nh_n\sqrt[3]{r^2} + ... + a_1h_1\sqrt[3]{r^2} = 0 \Rightarrow$$

$$" \qquad = a_nf_n + \ ...\ + a_1f_1 + a_0 + (a_ng_n + \ ...\ + a_1g_1)\sqrt[3]{r} + (a_nh_n + \ ...\ + a_1h_1)\sqrt[3]{r^2} = 0.$$

Entretanto, por hipótese, $\sqrt[3]{r} \neq 0$, então pelo lema 2.45 encontramos:

$$\begin{cases} a_nf_n + \ ...\ + a_1f_1 + a_0 = 0 \\ a_ng_n + \ ...\ + a_1g_1 = 0 \\ a_nh_n + \ ...\ + a_1h_1 = 0 \end{cases} . \tag{2.15}$$

Agora, vamos calcular o valor numérico de $c + d\omega\sqrt[3]{r}$:

$p\,(c+d\omega\sqrt[3]{r}) = a_n\,(c+d\omega\sqrt[3]{r})^n + \ ...\ + a_1\,(c+d\omega\sqrt[3]{r}) + a_0$. Aplicando a equação 2.13 do lema 2.47, obtemos:

$$p\,(c+d\omega\sqrt[3]{r}) = a_n(f_n + g_n\omega\sqrt[3]{r} + h_n\omega^2\sqrt[3]{r^2}) + \ ...\ + a_1(f_1 + g_1\omega\sqrt[3]{r} + h_1\omega^2\sqrt[3]{r^2}) + a_0 \Rightarrow$$

$$" \qquad = a_nf_n + a_ng_n\omega\sqrt[3]{r} + a_nh_n\omega^2\sqrt[3]{r^2} + \ ...\ + a_1f_1 + a_1g_1\omega\sqrt[3]{r} + a_1h_1\omega^2\sqrt[3]{r^2}) + a_0 \Rightarrow$$

$$" \qquad = a_nf_n + ... + a_1f_1 + a_0 + a_ng_n\omega\sqrt[3]{r} + ... + a_1g_1\omega\sqrt[3]{r} + a_nh_n\omega^2\sqrt[3]{r^2} + ... +$$

$$a_1h_1\omega^2\sqrt[3]{r^2} \Rightarrow$$

$$p\,(c+d\omega\sqrt[3]{r}) = a_nf_n + \ ...\ + a_1f_1 + a_0 + (a_ng_n + \ ...\ + a_1g_1)\omega\sqrt[3]{r} + (a_nh_n + \ ...\ + a_1h_1)\omega^2\sqrt[3]{r^2}.$$

Porém, por hipótese, $\omega \neq 0$ e $\sqrt[3]{r} \neq 0$ e pelo sistema de equações 2.15 deste teorema, temos

$$p\left(c+d\omega\sqrt[3]{r}\right) = 0 + (0)\omega\sqrt[3]{r} + (0)\omega^2\sqrt[3]{r^2} \Rightarrow p\left(c+d\omega\sqrt[3]{r}\right) = 0.$$

Portanto, $c + d\omega\sqrt[3]{r}$ é raiz do polinômio $p(x)$.

De forma análoga, vamos verificar o valor numérico de $c + d\omega^2\sqrt[3]{r}$:

$p\,(c + d\omega^2\sqrt[3]{r}) = a_n\,(c + d\omega^2\sqrt[3]{r})^n + \,...\, + a_1\,(c + d\omega^2\sqrt[3]{r}) + a_0$. Aplicando a equação 2.14 do lema 2.48 obtemos:

$p\,(c + d\omega^2\sqrt[3]{r}) = a_n(f_n + g_n\omega^2\sqrt[3]{r} + h_n\omega\sqrt[3]{r^2}) + \;...\; + a_1(f_1 + g_1\omega^2\sqrt[3]{r} + h_1\omega\sqrt[3]{r^2}) + a_0 \Rightarrow$

" $\quad = a_nf_n + a_ng_n\omega^2\sqrt[3]{r} + a_nh_n\omega\sqrt[3]{r^2} + \,...\, + a_1f_1 + a_1g_1\omega^2\sqrt[3]{r} + a_1h_1\omega\sqrt[3]{r^2}) + a_0 \Rightarrow$

" $\quad = a_nf_n + ... + a_1f_1 + a_0 + a_ng_n\omega^2\sqrt[3]{r} + ... + a_1g_1\omega^2\sqrt[3]{r} + a_nh_n\omega\sqrt[3]{r^2} + ... +$

$+ a_1h_1\omega\sqrt[3]{r^2} \Rightarrow$

$p\,(c + d\omega^2\sqrt[3]{r}) = a_nf_n + \,...\, + a_1f_1 + a_0 + (a_ng_n + \,...\, + a_1g_1)\omega^2\sqrt[3]{r} + (a_nh_n + \,...\, + a_1h_1)\omega\sqrt[3]{r^2}.$

Novamente, por hipótese, $\omega \neq 0$ e $\sqrt[3]{r} \neq 0$ e pelo sistema de equações 2.15 deste teorema, temos

$$p\left(c + d\omega^2\sqrt[3]{r}\right) = 0 + (0)\omega^2\sqrt[3]{r} + (0)\omega\sqrt[3]{r^2} \Rightarrow p\left(c + d\omega^2\sqrt[3]{r}\right) = 0.$$

Portanto, $c + d\omega^2\sqrt[3]{r}$ é raiz do polinômio $p(x)$.

Concluímos que se $c + d\sqrt[3]{r}$ for raiz de um polinômio $p(x)$, com coeficientes racionais e r um número racional não cubo perfeito, então

$$c + d\omega\sqrt[3]{r} \;\text{ e }\; c + d\omega^2\sqrt[3]{r}$$

também são raízes de $p(x)$, em que $\omega = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ e $\omega^2 = \dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$.

Para demonstrar o item ii verifique que

$$p(x) = (x - c - d\sqrt[3]{r})(x - c - d\omega\sqrt[3]{r})(x - c - d\omega^2\sqrt[3]{r})q_1(x) \Rightarrow$$
$$p(x) = (x^3 - 3cx^2 + 3c^2x - c^3 - d^3r)q_1(x),$$

nos quais os coeficientes de $x^3 - 3cx^2 + 3c^2x - c^3 - d^3r$ são números racionais e $q_1(x)$ é um polinômio cujos coeficientes também são números racionais. Em seguida, a demonstração segue de forma análoga ao item ii do teorema 2.40. $\square$

2.50 Exemplo. Encontre as raízes do polinômio

$$p(x) = x^5 - 10x^4 + 41x^3 - 140x^2 + 308x - 310,$$

sabendo que uma das raízes de $p(x)$ é $2+3\sqrt[3]{2}$.

Solução: Como $p(x)$ possui coeficientes racionais e $2+3\sqrt[3]{2}$ é raiz de $p(x)$, então $2+3\omega\sqrt[3]{2}$ e $2+3\omega^2\sqrt[3]{2}$ são raízes de $p(x)$, em que $\omega = (-1+\sqrt{3}i)/2$. Representando, respectivamente, por α_1, α_2 e α_3 essas raízes e pelo *Teorema da Decomposição* podemos denotar o polinômio $p(x)$ por $p(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)q(x)$, no qual $q(x)$ é um polinômio de grau 2, já que $p(x)$ tem grau 5. Neste caso, podemos caracterizar $q(x)$ por $q(x) = ax^2+b+c$. Sendo assim, $p(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)q(x) \Rightarrow$

$p(x) = (x-2-3\sqrt[3]{2})(x-2-3\omega\sqrt[3]{2})(x-2-3\omega^2\sqrt[3]{2})(ax^2+b+c)$. Multiplicando os três primeiros fatores encontramos o polinômio $x^3-6x^2+12x-62$. Logo,

$p(x) = (x^3-6x^2+12x-62)(ax^2+b+c)$, mas $p(x) = x^5-10x^4+41x^3-140x^2+308x-310$,

então $x^5-10x^4+41x^3-140x^2+308x-310 = (x^3-6x^2+12x-62)(ax^2+b+c) \Rightarrow$

$x^5-10x^4+41x^3-140x^2+308x-310 = (x^3-6x^2+12x-62)(ax^2+b+c)$.

$x^5-10x^4+41x^3-140x^2+308x-310 =$

$ax^5+(-6+b)x^4+(12a-6b+c)x^3+(-62a+12b-6c)x^2+(-62b+12c)x-62c$.

Agora, igualando os termos semelhantes obtemos:

$$\begin{cases} x^5 = ax^5 \Rightarrow a = 1, \\ -10x^4 = (-6+b)x^4 \Rightarrow b = -4 \\ -310 = -62c \Rightarrow c = 5 \end{cases}.$$

Logo, $q(x) = x^2-4x+5$, cujas raízes são $x_1 = 2+i$ e $x_2 = 2-i$.

Sendo assim, o polinômio $p(x)$ tem como conjunto solução:

$\{2+i,\ 2-i,\ 2+3\sqrt[3]{2},\ 2+3\omega\sqrt[3]{2},\ 2+3\omega^2\sqrt[3]{2}\}$.

2.8 Equações Recíprocas

Para identificar o reconhecimento de equações recíprocas através dos coeficientes precisaremos do seguinte lema:

2.51 Lema (Polinômios de Raízes Iguais). *Considere dois polinômios* $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ *e* $h(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$, *de mesmo grau* $n > 0$, $a_n \cdot b_n \neq 0$, *cujas raízes são iguais e mesma multiplicidade. Sendo assim, existe um* $k \in \mathbb{R}^*$, *tal que,* $\dfrac{a_n}{b_n} = k$.

Demonstração. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, essas n raízes de $p(x)$ e $h(x)$ e $k \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ ... \ + a_1 x + a_0 = 0 \Rightarrow \\ p(x) &= a_n(x-\alpha_n)(x-\alpha_{n-1})...(x-\alpha_2)(x-\alpha_1). \end{aligned} \tag{2.16}$$

e

$$\begin{aligned} h(x) &= b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ ... \ + b_1 x + b_0 = 0 \Rightarrow \\ h(x) &= b_n(x-\alpha_n)(x-\alpha_{n-1})...(x-\alpha_2)(x-\alpha_1). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Pelas equações 2.16 e 2.17 obtemos:

$\dfrac{p(x)}{h(x)} = \dfrac{a_n(x-\alpha_n)(x-\alpha_{n-1})...(x-\alpha_2)(x-\alpha_1)}{b_n(x-\alpha_n)(x-\alpha_{n-1})...(x-\alpha_2)(x-\alpha_1)} = \dfrac{a_n}{b_n} = k$, em que k é uma constante, não nula, também denominada constante de proporcionalidade. Sendo assim,

$p(x) = kh(x) \Rightarrow a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ ... \ + a_1 x + a_0 = k(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ ... \ + b_1 x + b_0)$.

Agora, pela identidade de polinômios, vemos que:

$$\begin{cases} a_n = kb_n \\ a_{n-1} = kb_{n-1} \\ . \\ . \\ . \\ a_1 = kb_1 \\ a_0 = kb_0 \end{cases}.$$

Concluímos que dois polinômios $p(x)$ e $h(x)$ com coeficientes complexos, nos quais, os coeficientes dos termos semelhantes são proporcionais, existe um número real k não nulo tal que, $p(x) = kh(x)$ se, e somente se, as raízes $p(x)$ e $h(x)$ sejam iguais e de mesma multiplicidade. □

2.52 Exemplo. Seja o polinômio $p(x) = -3x^4 + 7x^3 - 2x + 1$. Agora, multiplicando esse polinômio por $k = -5$ obtemos um outro polinômio $h(x) = 15x^4 - 35x^3 + 10x - 5$, que tem as mesmas raízes de $p(x)$ e com as mesmas multiplicidades.

2.53 Definição. Considere a equação $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ ... \ + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, com $a_n \neq 0$, $n > 0$ e com coeficientes complexos. Denominamos por *equação algébrica* *recíproca* se, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ que é raiz de $p(x)$ de multiplicidade m, então $1/\alpha$ também é raiz de $p(x)$ e de mesma multiplicidade m.

2.54 Definição. Denominamos por *Polinômios Recíprocos* os polinômios geradores das equações recíprocas.

2.55 Exemplo. A equação $14x^4 - 135x^3 + 278x^2 - 135x + 14 = 0$ é recíproca, pois suas raízes são $\{2,\ 1/2,\ 7,\ 1/7\}$.

Observação: Os números 1 e -1 possuem inversos iguais, então quando tais números forem raízes de uma equação recíproca não é necessário que tenham multiplicidades pares, conforme veremos no exemplo abaixo.

2.56 Exemplo. A equação $10x^5 - 87x^4 + 227x^3 - 227x^2 + 87x - 10 = 0$ é recíproca, pois suas raízes são $\{2,\ 1/2,\ 5,\ 1/5,\ 1\}$.

2.57 Exemplo. A equação $6x^5 - 47x^4 + 132x^3 - 159x^2 + 76x - 12 = 0$ cujas raízes são 3, 1/3, ambas com multiplicidade 1, 2 e 1/2 com multiplicidades 2 e 1, respectivamente. Portanto, a equação dada não é recíproca, pois apresentam raízes com multiplicidades distintas.

2.8.1 Reconhecimento de Equações Recíprocas Através dos Coeficientes

Considere o polinômio recíproco $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ \dots\ + a_2x^2 + a_1x + a_0$, de raiz α. Logo,

$$p(\alpha) = 0 \Rightarrow a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ \dots\ + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0. \tag{2.18}$$

Entretanto, como α é raiz de $p(x)$, então $1/\alpha$ também é raiz de $p(x)$. Portanto,

$$p\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0 \Rightarrow a_n\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-1} + \ \dots\ + a_2\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + a_1\left(\frac{1}{\alpha}\right) + a_0 = 0 \Rightarrow$$

$$a_n\left(\frac{1}{\alpha^n}\right) + a_{n-1}\left(\frac{1}{\alpha^{n-1}}\right) + \ \dots\ + a_2\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) + a_1\left(\frac{1}{\alpha}\right) + a_0 = 0.$$

Multiplicando essa equação por α^n, temos:

$$a_n\left(\frac{1}{\alpha^n}\right)\alpha^n + a_{n-1}\left(\frac{1}{\alpha^{n-1}}\right)\alpha^n + \ \dots\ + a_2\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)\alpha^n + a_1\left(\frac{1}{\alpha}\right)\alpha^n + a_0\alpha^n = 0 \Rightarrow$$

$$a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + a_2\alpha^{n-2} + \ ... \ + a_{n-1}\alpha + a_n = 0. \tag{2.19}$$

As equações 2.18 e 2.19 possuem as mesmas raízes e as mesmas multiplicidades. Portanto, pelo lema 2.51 os coeficientes são iguais, assim temos:

$$\begin{cases} a_n = ka_0 \\ a_{n-1} = ka_1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ a_2 = ka_{n-2} \\ a_1 = ka_{n-1} \\ a_0 = ka_n \end{cases}, \tag{2.20}$$

para algum $k \in \mathbb{R}^*$.

Note que a_0 e a_n são os coeficientes dos termos extremos;

a_1 e a_{n-1} são os coeficientes dos termos equidistantes dos extremos;

a_2 e a_{n-2} são os coeficientes dos termos equidistantes dos extremos;

. . . .

Agora, da equação 2.20 vemos que $a_0 = ka_n$ e $a_n = ka_0$, então $a_n = k(ka_n) \Rightarrow a_n = k^2a_n \Rightarrow k^2 = 1 \Rightarrow k = \pm 1$.

Sendo assim, temos duas possibilidades a considerar:

Primeira possibilidade: Para $k = 1$, os coeficientes dos termos equidistantes dos extremos (e os extremos) são iguais. Neste caso, denominamos equação recíproca de *primeira classe*;

Segunda possibilidade: Para $k = -1$, os coeficientes dos termos equidistantes dos extremos (e os extremos) são simétricos. Neste caso, denominamos equação recíproca de *segunda classe*.

Observação: Todos os passos que foram realizados até aqui podem ser revertidos, ou seja, vale a volta da afirmativa. Portanto, numa equação cujos coeficientes dos termos equidistantes dos extremos (e os extremos) são iguais ou simétricos, então essa equação é recíproca.

2.58 Exemplo. Considere a equação $18x^5 - 101x^4 - 493x^3 - 493x^2 - 101x + 18 = 0$. Note que os coeficientes dos termos equidistantes dos extremos (e os extremos) são iguais. Portanto, essa é uma equação recíproca de primeira classe.

2.59 Exemplo. Considere a equação $18x^5 - 137x^4 - 225x^3 + 255x^2 + 137x - 18 = 0$. Note que os coeficientes dos termos equidistantes dos extremos (e os extremos) são simétricos. Portanto, essa é uma equação recíproca de segunda classe.

2.60 Exemplo. Considere a equação $18x^4 - 119x^3 - 374x^2 - 119x + 18 = 0$. Note que os coeficientes dos termos equidistantes dos extremos (e os extremos) são iguais. Perceba também que o termo central é igual a si mesmo. Portanto, essa é uma equação recíproca de primeira classe.

2.8.2 Resoluções de Equações Recíprocas

Nesta seção pretendemos mostrar que todo polinômio recíproco $p(x)$ é da forma

$$p(x) = (x-1)^a(x+1)^b q(x), \tag{2.21}$$

nos quais a, b são números inteiros não negativos e $q(x)$ é um polinômio recíproco de primeira classe, grau par e $q(1) \neq 0$ e $q(-1) \neq 0$. A ideia central na resolução das equações recíprocas é obter o polinômio $q(x)$, isto é, o polinômio de primeira classe e grau par e, em seguida, aplicar as técnicas de resoluções adequadas que serão comentadas nos momentos oportunos.

Antes de iniciarmos as resoluções das equações recíprocas, verificaremos os casos quando 1 e/ou -1 são raízes dessas equações.

Primeiro caso: Polinômio recíproco de primeira classe e grau ímpar: Veremos que -1 é raiz desse polinômio. Iniciaremos com um exemplo. Considere um polinômio recíproco $p_1(x)$, de primeira classe, grau 7 e cuja raiz -1 seja simples. Tome

$$p_1(x) = a_0x^7 + a_1x^6 + a_2x^5 + a_3x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

que ao ser dividido por $x+1$ tem como polinômio quociente $q_1(x)$:

$$q_1(x) =$$
$$a_0x^6 + (a_1 - a_0)x^5 + (a_2 + a_0 - a_1)x^4 + (a_3 + a_1 - a_2 - a_0)x^3 + (a_2 + a_0 - a_1)x^2 + (a_1 - a_0)x + a_0.$$

Observe que esse polinômio é recíproco, de *primeira classe e grau par, tal que,* $q_1(-1) \neq 0$.

Podemos generalizar esse fato para qualquer polinômio recíproco de primeira classe e grau ímpar:

2.61 Lema. *Todo polinômio recíproco* $p(x)$, *de primeira classe e grau ímpar é representado por:*

$$p(x) = a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + a_2x^{2n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

então -1 *é raiz do polinômio* $p(x)$. *Mais ainda,* $p(x) = (x+1)q(x)$, *para o qual* $q(x)$ *é polinômio recíproco de primeira classe, grau par e* $q(-1) \neq 0$.

Demonstração. Note que esse polinômio possui uma quantidade par de termos e, por simetria, vemos que -1 é raiz desse polinômio, pois,

$$p(-1) = a_0(-1)^{2n+1} + a_1(-1)^{2n} + a_2(-1)^{2n-1} + ... + a_2(-1)^2 + a_1(-1) + a_0 \Rightarrow$$

$$p(-1) = -a_0 + a_1 - a_2 + ... + a_2 - a_1 + a_0 \Rightarrow$$

$$p(-1) = 0.$$

Agora, como -1 raiz simples, então ao dividir $p(x)$ por $x+1$ obtemos um polinômio $q(x)$, tal que:

$$q(x) = a_0x^{2n} + (a_1 - a_0)x^{2n-1} + (a_2 + a_0 - a_1)x^{2n-2} + ... + (a_2 + a_0 - a_1)x^2 + (a_1 - a_0)x + a_0,$$

no qual $q(x)$ é um polinômio recíproco, de primeira classe, grau par, tal que, $q(-1) \neq 0$ □

Segundo caso: Polinômio recíproco de segunda classe e grau ímpar: Veremos que 1 é raiz desse polinômio. Iniciaremos com um exemplo.

Considere um polinômio recíproco $p_2(x)$, de segunda classe, grau 7 e cuja raiz 1 seja simples. Tome

$$p_2(x) = a_0x^7 + a_1x^6 + a_2x^5 + a_3x^4 - a_3x^3 - a_2x^2 - a_1x - a_0,$$

que ao ser dividido por $x - 1$ tem como polinômio quociente $q_2(x)$:

$$q_2(x) =$$
$$a_0x^6 + (a_0 + a_1)x^5 + (a_0 + a_1 + a_2)x^4 + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)x^3 + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + (a_0 + a_1)x + a_0.$$

Observe que esse polinômio é recíproco, de *primeira classe e grau par, tal que,* $q_2(1) \neq 0$.

Podemos generalizar esse fato para o polinômio recíproco de segunda classe e grau ímpar:

2.62 Lema. *Todo polinômio recíproco $p(x)$, de segunda classe e grau ímpar é representado por:*

$$p(x) = a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + a_2x^{2n-1} + ... - a_2x^2 - a_1x - a_0,$$

então 1 é raiz do polinômio $p(x)$ e mais ainda, $p(x) = (x-1)q(x)$, no qual, $q(x)$ é de primeira classe, grau par e $q(1) \neq 0$.

Demonstração. Note que esse polinômio possui uma quantidade par de termos e, por simetria, vemos que 1 é raiz desse polinômio, pois,

$$p(1) = a_0(1)^{2n+1} + a_1(1)^{2n} + a_2(1)^{2n-1} + ... - a_2(1)^2 - a_1(1) - a_0 \Rightarrow$$

$$p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + ... - a_2 - a_1 - a_0 \Rightarrow$$

$$p(1) = 0.$$

Seja 1 raiz simples, então ao dividir $p(x)$ por $x-1$ obtemos um polinômio $q(x)$, tal que:

$$q(x) = a_0x^{2n} + (a_0+a_1)x^{2n-1} + (a_0+a_1+a_2)x^{2n-2} + ... + (a_0+a_1+a_2)x^2 + (a_0+a_1)x + a_0,$$

no qual $q(x)$ é um polinômio recíproco, de primeira classe, grau par, tal que, $q(1) \neq 0$. □

Terceiro caso: Polinômio recíproco de segunda classe e grau par: Veremos que -1 e 1 são raízes desse polinômio. Segue novamente um exemplo: Considere um polinômio recíproco $p_3(x)$, de segunda classe, grau 6 e cujas raízes 1 e -1 sejam simples. Tome

$$p_3(x) = a_0x^6 + a_1x^5 + a_2x^4 + 0x^3 - a_2x^2 - a_1x - a_0,$$

que ao ser dividido por $x-1$ tem como quociente $q_3(x)$:

$$q_3(x) = a_0x^5 + (a_0+a_1)x^4 + (a_0+a_1+a_2)x^3 + (a_0+a_1+a_2)x^2 + (a_0+a_1)x + a_0.$$

Agora, dividindo $q_3(x)$ por $x+1$ obtemos um polinômio quociente $q_4(x)$:

$$q_4(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + (a_0+a_2)x^2 + a_1x + a_0,$$

que é um polinômio recíproco, de primeira classe e grau par, tais que, $q_3(1) \neq 0$ e $q_4(-1) \neq 0$.

Observe que o polinômio recíproco $p_3(x)$, de segunda classe e grau par ao ser dividido por $x - 1$ apresentou um polinômio recíproco $q_3(x)$, de primeira classe e grau ímpar e, em seguida, ao dividir $q_3(x)$ por $x + 1$ obtivemos um polinômio recíproco $q_4(x)$, de primeira classe e grau par.

Podemos generalizar esse fato para o polinômio recíproco de segunda classe e grau par:

$$p(x) = a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + a_2x^{2n-2} + ... + a_{n-1}x^{n+1} - a_{n-1}x^{n-1} + ... - a_2x^2 - a_1x - a_0,$$

ou seja, ao dividir $p(x)$ por $x^2 - 1$, obtemos o seguinte polinômio $q(x)$:

$$q(x) = a_0x^{2n-2} + a_1x^{2n-3} + (a_0 + a_2)x^{2n-4} + ... + (a_0 + a_2)x^2 + a_1x + a_0,$$

que é um polinômio recíproco, de primeira classe e grau par, tais que, $q(-1),\ q(1) \neq 0$.

2.63 Lema. *Todo polinômio recíproco $p(x)$, de segunda classe e grau par é representado por:*

$$p(x) = a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + a_2x^{2n-2} + ... + a_{n-1}x^{n+1} + a_nx^n - a_{n-1}x^{n-1} + ... - a_2x^2 - a_1x - a_0,$$

então -1 e 1 são raízes do polinômio $p(x)$.

Demonstração. Note que esse polinômio possui uma quantidade ímpar de termos, mas como os coeficientes dos termos equidistantes dos extremos (e os extremos) são simétricos, então o termo do meio $a_n = -a_n \Rightarrow a_n = 0$. Portanto, nas equações recíprocas de segunda classe e grau par, o coeficiente de $x^{n/2}$ é nulo. Consequentemente, essa equação possui uma quantidade par de termos. Logo,

$$p(x) = a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + a_2x^{2n-2} + ... + a_{n-1}x^{n+1} + 0x^n - a_{n-1}x^{n-1} + ... - a_2x^2 - a_1x - a_0.$$

Sendo assim,

$p(1) = a_0(1)^{2n} + a_1(1)^{2n-1} + a_2(1)^{2n-2} + ... - a_2(1)^2 - a_1(1) - a_0 \Rightarrow$

$p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + ... - a_2 - a_1 - a_0 \Rightarrow$

$p(1) = 0$. Portanto, 1 é raiz de $p(x)$.

De forma análoga, temos:

$p(-1) = a_0(-1)^{2n} + a_1(-1)^{2n-1} + a_2(-1)^{2n-2} + ... - a_2(-1)^2 - a_1(-1) - a_0 \Rightarrow$

$p(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - ... - a_2 + a_1 - a_0 \Rightarrow$

$p(-1) = 0$. Portanto, -1 é raiz de $p(x)$.

Concluímos que nos casos dos polinômios recíprocos de segunda classe e grau par, os números 1 e -1 são raízes desse polinômio. $\square$

Perceba que nos lemas 2.61, 2.62 e 2.63 os polinômios recíprocos quocientes $q(x)$ são todos de primeira classe, grau par, tais que, 1 e/ou -1 não figuram como raízes. Portanto, basta saber resolver os polinômios com essa característica para solucionar todos os casos de polinômios recíprocos.

Agora, para resolver as equações recíprocas devemos seguir os seguintes passos:

Primeiro: Verificar se 1 ou -1 é raiz da equação dada, se for, dividir essa equação por $x-1$ ou $x+1$, respectivamente, até que a equação quociente não tenham essas raízes. Sendo assim, teremos uma equação recíproca de primeira classe e grau par;

Segundo: Fatorar o termo $x^{n/2}$ na equação de primeira classe e grau par;

Terceiro: Substituir, convenientemente, pela variável

$$x + \frac{1}{x} = y$$

ou por suas relações. Esses procedimentos são ilustrados nos exemplos abaixo:

2.64 Exemplo. Resolva a equação $42x^5 + 251x^4 - 357x^3 - 357x^2 + 251x + 42 = 0$.

Solução: Como a equação $42x^5 + 251x^4 - 357x^3 - 357x^2 + 251x + 42 = 0$ é recíproca de primeira classe e grau ímpar, então obrigatoriamente -1 é raiz dessa equação. Logo, dividindo-a por $x+1$, obtemos $42x^4 + 209x^3 - 566x^2 + 209x + 42 = 0$, que é uma equação recíproca de primeira classe, grau par, em que 1 e -1 não são raízes. Agora, vamos continuar realizando os passos sugeridos, ou seja, fatorar o termo x^2:

$42x^4 + 209x^3 - 566x^2 + 209x + 42 = 0 \Rightarrow \; x^2\left(42x^2 + 209x - 566 + \dfrac{209}{x} + \dfrac{42}{x^2}\right) = 0 \Rightarrow$

$42x^2 + 209x - 566 + \dfrac{209}{x} + \dfrac{42}{x^2} = 0 \Rightarrow \quad 42\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + 209\left(x + \dfrac{1}{x}\right) - 566 = 0$, mas utilizando o artifício de troca de variáveis, temos

$x + \dfrac{1}{x} = y \Rightarrow \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = y^2 \Rightarrow x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2} = y^2 \Rightarrow x^2 + \dfrac{1}{x^2} = y^2 - 2$, então

$42(y^2 - 2) + 209y - 566 = 0 \Rightarrow 42y^2 + 209y - 650 = 0$, cujas raízes são $y_1 = 91/42$ e $y_2 = 50/7$. Logo,

$x + \dfrac{1}{x} = y_1 \Rightarrow x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{91}{42} \Rightarrow 42x^2 - 91x + 42 = 0$, de raízes $x_1 = \dfrac{3}{2}$ e $x_2 = \dfrac{2}{3}$;

ou

$x + \dfrac{1}{x} = y_2 \Rightarrow x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{50}{7} \Rightarrow 7x^2 - 50x + 7 = 0$, cujas raízes são $x_3 = \dfrac{1}{7}$ e $x_4 = 7$.

Portanto, as raízes da equação $42x^5 + 251x^4 - 357x^3 - 357x^2 + 251x + 42 = 0$ são $\{-1,\ 3/2,\ 2/3,\ 1/7,\ 7\}$.

2.65 Exemplo. ITA(1975)-Seja S o conjunto de todas as raízes da equação

$$2x^6 - 4x^5 + 4x - 2 = 0.$$

Sobre os elementos de S podemos afirmar que:

A) Todos são números reais.

B) 4 são números reais positivos.

C) 4 são números reais.

D) 3 são números reais positivos e 2 não são reais.

E) 3 são números reais negativos.

Solução: Analisando a equação $2x^6 - 4x^5 + 4x - 2 = 0$, que pode ser representada por $2x^6 - 4x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 4x - 2 = 0$, é uma equação recíproca de segunda classe e grau par. Sendo assim, 1 e -1 são raízes dessa equação. Logo, dividindo $2x^6 - 4x^5 + 4x - 2 = 0$ por $x^2 - 1$, obtemos $2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 2$, que é uma equação de primeira classe e grau par.

Agora, vamos resolver a equação $2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 2 = 0$.

$2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow 2x^2\left(x^2 - 2x + 1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right) \Rightarrow$

$2x^2\left[\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+1\right]=0$. Porém, $x+\dfrac{1}{x}=y$ e $x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2$, então $y^2-2-2y+1=0 \Rightarrow y^2-2y-1=0$. Resolvendo essa equação encontramos $y_1=1+\sqrt{2}$ e $y_2=1-\sqrt{2}$ como raízes. Sendo assim, temos duas possibilidades para serem analisadas:

$x+\dfrac{1}{x}=y_1 \Rightarrow x+\dfrac{1}{x}=1+\sqrt{2} \Rightarrow x^2-(1+\sqrt{2})x+1=0$. Resolvendo esse equação obtemos

$x_1=(1+\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}-1})/2$ e $x_2=(1+\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1})/2$, que são duas raízes positivas;

ou

$x+\dfrac{1}{x}=y_2 \Rightarrow x+\dfrac{1}{x}=1-\sqrt{2} \Rightarrow x^2-(1-\sqrt{2})x+1=0$. Neste caso, o discriminante $\Delta=-2\sqrt{2}-1<0$. Logo, temos duas raízes complexas não reais.

Portanto, a equação $2x^6-4x^5+4x-2=0$ tem como solução:

Três raízes reais positivas: $\{1,\ (1+\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}-1})/2,\ (1+\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1})/2\}$;

Duas raízes complexas não reais e uma raiz real negativa.

Resposta: Alternativa D.

Capítulo 3

Raízes Racionais de um Polinômio com Coeficientes Inteiros

3.1 Raízes Racionais

3.1 Teorema (Das Raízes Racionais). *Considere o polinômio* $h(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, *com* $a_n \neq 0$, *de grau* $n > 0$ *e de* ***coeficientes inteiros***. *Seja um número racional* p/q, *tais que,* p *e* $q \in \mathbb{Z}^*$ *e* $M.D.C.(p,q) = 1$, *ou seja,* p *e* q *são primos entre si. Sendo assim, se* p/q *for raiz de* $h(x)$, *então* p *é divisor de* a_0 *e* q *é divisor de* a_n.

Demonstração. Hipótese: p/q é raiz de $h(x)$, tais que, p e $q \in \mathbb{Z}^*$ e $M.D.C.(p,q) = 1$.

Tese: p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

Como $\dfrac{p}{q}$ é raiz de $h(x)$, então $h\left(\dfrac{p}{q}\right) = 0$. Logo,

$a_n\left(\dfrac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\dfrac{p}{q}\right)^{n-1} + \ \ldots \ + a_2\left(\dfrac{p}{q}\right)^2 + a_1\left(\dfrac{p}{q}\right) + a_0 = 0 \Leftrightarrow$

$a_n\dfrac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\dfrac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ \ldots \ + a_2\dfrac{p^2}{q^2} + a_1\dfrac{p}{q} + a_0 = 0$. Multiplicando essa igualdade por q^n, temos:

$a_n\left(\dfrac{p^n}{q^n}\right)q^n + a_{n-1}\left(\dfrac{p^{n-1}}{q^{n-1}}\right)q^n + \ \ldots \ + a_2\left(\dfrac{p^2}{q^2}\right)q^n + a_1\left(\dfrac{p}{q}\right)q^n + a_0q^n = 0 \Leftrightarrow$

$$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ \ldots \ + a_2p^2q^{n-2} + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0. \tag{3.1}$$

Agora, somando o termo $-a_0q^n$ a ambos os lados da equação 3.1, obtemos:

$$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ ... \ + a_2p^2q^{n-2} + a_1pq^{n-1} = -a_0q^n. \tag{3.2}$$

O termo p é fator comum dos termos do lado esquerdo da equação 3.2 e colocando-o em evidência, obtemos:

$$p(a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \ ... \ + a_2pq^{n-2} + a_1q^{n-1}) = -a_0q^n.$$

Por fim, multiplicando a equação acima por $1/p$, vemos que:

$$a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \ ... \ + a_2pq^{n-2} + a_1q^{n-1} = -\frac{a_0q^n}{p}. \tag{3.3}$$

Observe que o lado esquerdo da equação 3.3 representa um número inteiro, pois os coeficientes são números inteiros, p e q também são números inteiros e $n > 0$. Portanto, o termo do lado direito é um número inteiro, ou seja, $-a_0q^n/p \in \mathbb{Z}$. Entretanto, para que isso ocorra p deve dividir a_0, já que p e q são primos entre si.

De forma análoga, somando o termo $-a_np^n$ a ambos os lados da equação 3.1, temos:

$$a_{n-1}p^{n-1}q + \ ... \ + a_2p^2q^{n-2} + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = -a_np^n. \tag{3.4}$$

O termo q é fator comum dos termos do lado esquerdo da equação 3.4 e colocando-o em evidência, obtemos:

$$q(a_{n-1}p^{n-1} + \ ... \ + a_2p^2q^{n-3} + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1}) = -a_np^n.$$

Finalmente, multiplicando a equação acima por $1/q$, obtemos:

$$a_{n-1}p^{n-1} + \ ... \ + a_2p^2q^{n-3} + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1} = -\frac{a_np^n}{q}. \tag{3.5}$$

Note que o lado esquerdo da equação 3.5 representa um número inteiro, pois os coeficientes são números inteiros, p e q também são números inteiros e $n > 0$. Portanto, o termo do lado direito é um número inteiro, ou seja, $-a_np^n/q \in \mathbb{Z}$. Entretanto, para que isso ocorra q deve dividir a_n, já que p e q são *coprimos.* $\square$

3.2 Corolário. *Considere o polinômio* $h(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ ... \ + a_2x^2 + a_1x + a_0$, *com* $a_n \neq 0$, *de grau* $n > 0$ *e de* ***coeficientes inteiros****. Se* α *é raiz de* $h(x)$ *e* $\alpha \in \mathbb{Z}^*$, *então* α *é divisor de* a_0.

Demonstração. Considere $\alpha = p/q$, tais que, p e $q \in \mathbb{Z}^*$ e $M.D.C.(p, q) = 1$. Por hipótese, α é um número inteiro, então q é igual a ± 1 e, consequentemente, $\alpha = \pm p$. Agora, aplicando o teorema 3.1, se α é raiz de $h(x)$, então p é divisor de a_0. Portanto, α também é divisor de a_0. $\square$

3.3 Corolário. *Considere o polinômio* $h(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ \dots \ + a_2x^2 + a_1x + a_0$, *com* $a_n \neq 0$, *de grau* $n > 0$ *e de* ***coeficientes inteiros***. *Se* $a_n = \pm 1$, *então se* $h(x)$ *admitir raízes racionais, estas são números inteiros.*

Demonstração. Considere $\alpha = p/q$, tais que, p e $q \in \mathbb{Z}^*$ e $M.D.C.(p, q) = 1$. Se α é raiz de $h(x)$, então pelo teorema 3.1 temos que $p|a_0$ e $q|a_n$. Entretanto, por hipótese, $a_n = \pm 1$ e, consequentemente, $q = \pm 1$. Portanto, $\alpha = p/q = p/\pm 1 = \pm p \Rightarrow \alpha \in \mathbb{Z}^*$, pois $p \in \mathbb{Z}^*$. $\square$

3.4 Exemplo. Encontre as raízes do polinômio $h(x) = 3x^3 - 14x^2 + 18x - 4$.

Solução: Aplicando o *Teorema das Raízes Racionais*, se existir uma raiz racional p/q, as possibilidades para p são $\{\pm 1, \ \pm 2, \ \pm 4\}$ e para q são $\{\pm 1, \ \pm 3\}$. Portanto, as possíveis raízes racionais p/q de $h(x)$ são $\{\pm 1, \ \pm 2, \ \pm 4, \ \pm 1/3, \ \pm 2/3, \ \pm 4/3\}$.

Realizando as tentativas vemos que 2 é raiz da equação dada. Sendo assim, podemos reduzir o grau do polinômio $h(x)$. Logo:

$$
\begin{array}{r|l}
3x^3 - 14x^2 + 18x - 4 & \ x - 2 \\ \cline{2-2}
\underline{-3x^3 + \ 6x^2} \qquad\qquad & 3x^2 - 8x + 2 \\
-8x^2 + 18x \quad\ & \\
\underline{8x^2 - 16x} \quad\ & \\
2x - 4 & \\
\underline{-2x + 4} & \\
0 &
\end{array}
$$

Agora, resolvendo a equação $3x^2 - 8x + 2 = 0$ encontramos $x_1 = (4 + \sqrt{10})/3$ e $x_2 = (4 - \sqrt{10})/3$ como raízes.

Portanto, as raízes de $h(x)$ são $\{(4 - \sqrt{10})/3, \ (4 + \sqrt{10})/3, \ 2\}$.

3.5 Exemplo. Resolva a equação $90x^6 - 321x^5 - 170x^4 + 1058x^3 - 170x^2 - 321x + 90 = 0$.

Solução: Verificamos que 1 e -1 não figuram como raízes dessa equação. Sendo assim, a equação dada é uma equação recíproca de primeira classe e grau par. Agora, fatorando x^3 temos:

$$90x^6 - 321x^5 - 170x^4 + 1058x^3 - 170x^2 - 321x + 90 = 0 \Rightarrow$$

$$x^3\left(90x^3 - 321x^2 - 170x + 1058 - \frac{170}{x} - \frac{321}{x^2} + \frac{90}{x^3}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$90x^3 - 321x^2 - 170x + 1058 - \frac{170}{x} - \frac{321}{x^2} + \frac{90}{x^3} = 0 \Rightarrow$$

$$90\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - 321\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 170\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1058 = 0.$$

Entretanto, $x + \dfrac{1}{x} = y; \quad x^2 + \dfrac{1}{x^2} = y^2 - 2$ e

$$x + \frac{1}{x} = y \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = y^3 \Rightarrow x^3 + 3x^2\left(\frac{1}{x}\right) + 3x\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x^3} = y^3 \Rightarrow$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x + \frac{3}{x} = y^3 \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = y^3 \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 3y = y^3 \Rightarrow$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y.$$

Desta maneira, temos

$$90\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - 321\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 170\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1058 = 0 \Rightarrow$$

$$90(y^3 - 3y) - 321(y^2 - 2) - 170y + 1058 = 0 \Rightarrow$$

$$90y^3 - 321y^2 - 440y + 1700 = 0.$$

Aplicando o *Teorema das Raízes Racionais* vemos que $5/2$ é raiz dessa equação. Portanto, podemos reduzir o grau da equação $90y^3 - 321y^2 - 440y + 1700 = 0$ dividindo-a por $y - 5/2$, obtemos assim a equação $45y^2 - 48y - 340 = 0$, cujas raízes são $y_2 = 10/3$ e $y_3 = -34/15$. Logo,

$x + \dfrac{1}{x} = y_1 \Rightarrow x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{2} \Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$, cujas raízes são $x_1 = 2$ e $x_2 = \dfrac{1}{2}$;

$x + \dfrac{1}{x} = y_2 \Rightarrow x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{10}{3} \Rightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0$, das quais $x_3 = 3$ e $x_4 = \dfrac{1}{3}$ são suas raízes;

$x + \dfrac{1}{x} = y_3 \Rightarrow x + \dfrac{1}{x} = -\dfrac{34}{15} \Rightarrow 15x^2 + 34x + 15 = 0$, de raízes $x_5 = -\dfrac{3}{5}$ e $x_6 = -\dfrac{5}{3}$.

Portanto, as raízes da equação $90x^6 - 321x^5 - 170x^4 + 1058x^3 - 170x^2 - 321x + 90 = 0$ são $\{-3/5,\ -5/3,\ 1/3,\ 3,\ 1/2,\ 2\}$.

3.6 Teorema. *Considere o polinômio* $h(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ ... \ + a_1 x + a_0$, *com* $a_n \neq 0$, *de grau* $n > 0$ *e de* ***coeficientes inteiros***. *Se* p/q *for raiz de* $h(x)$, *então* $p - mq$ *é divisor de* $h(m)$, *para todo* $m \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Hipótese: p/q é raiz de $h(x)$, tais que, p e $q \in \mathbb{Z}^*$ e $M.D.C.(p,q) = 1$.

Tese: $p - mq$ é divisor de $h(m)$, para todo $m \in \mathbb{Z}$.

Note que $h(m) = a_n m^n + a_{n-1}m^{n-1} + \ ... \ + a_1 m + a_0 \Rightarrow$

$$a_0 = h(m) - a_n m^n - a_{n-1}m^{n-1} - \ ... \ - a_1 m. \tag{3.6}$$

Agora, como p/q é raiz de $h(x)$, então $h(p/q) = 0$, logo:

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ ... \ + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ ... \ + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0. \tag{3.7}$$

Substituindo a_0 da equação 3.6 na equação 3.7, encontramos:

$$a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ ... \ + a_1 \frac{p}{q} + h(m) - a_n m^n - a_{n-1}m^{n-1} - \ ... \ - a_1 m = 0 \Rightarrow$$

$$h(m) = -\left(a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + ... + a_1 \frac{p}{q} - a_n m^n - a_{n-1}m^{n-1} - ... - a_1 m\right) \Rightarrow$$

$$h(m) = -\left(a_n \frac{p^n}{q^n} - a_n m^n + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} - a_{n-1}m^{n-1} + \ ... \ + a_1 \frac{p}{q} - a_1 m\right) \Rightarrow$$

$$h(m) = -\left[a_n \left(\frac{p^n}{q^n} - m^n\right) + a_{n-1}\left(\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} - m^{n-1}\right) + \ ... \ + a_1\left(\frac{p}{q} - m\right)\right] \Rightarrow$$

$$h(m) = -\left[a_n \left(\frac{p^n - m^n q^n}{q^n}\right) + a_{n-1}\left(\frac{p^{n-1} - m^{n-1}q^{n-1}}{q^{n-1}}\right) + ... + a_1\left(\frac{p - mq}{q}\right)\right] \Rightarrow$$

$$h(m) = -\left\{a_n \left[\frac{p^n - (mq)^n}{q^n}\right] + a_{n-1}\left[\frac{p^{n-1} - (mq)^{n-1}}{q^{n-1}}\right] + ... + a_1\left[\frac{p - mq}{q}\right]\right\}. \tag{3.8}$$

Agora, tome como exemplo o termo $a_n[p^n - (mq)^n]/q^n$ da equação 3.8. Note que o numerador $p^n - (mq)^n = (p - mq)[p^{n-1} + p^{n-2}(mq) + ... + p^2(mq)^{n-3} + p(mq)^{n-2} + (mq)^{n-1}]$. De forma análoga, podemos ver que em todos os termos da identidade 3.8 aparece o fator $p - mq$. Donde, $h(m) = (p - mq)q(m)$, ou seja, $p - mq$ é divisor de $h(m)$. □

3.7 Corolário. *Considere o polinômio* $h(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ ... \ + a_2x^2 + a_1x + a_0$, *com* $a_n \neq 0$, *de grau* $n > 0$ *e de* ***coeficientes inteiros***. *Se* p/q *é uma fração irredutível e raiz de* $p(x)$, *então* $p - q$ *divide* $h(1)$ *e* $p + q$ *divide* $h(-1)$.

3.8 Exemplo. Dado o polinômio $h(x) = 6x^3 - x^2 - 21x + 10$, as possíveis raízes racionais são $\{\pm 1/6,\ \pm 1/3,\ \pm 1/2,\ \pm 2/3,\ \pm 5/6,\ \pm 1,\ \pm 5/3,\ \pm 2,\ \pm 5/2,\ \pm 10/3,\ \pm 5,\ \pm 10\}$.

Para verificação, tome o número 5/3. Neste caso, $p = 5$, $q = 3$ e considere $m = 5$.

Agora, calculando $h(5)$, temos $h(5) = 6(5)^3 - (5)^2 - 21(5) + 10 = 630$.

Sendo assim, $p - mq = 5 - (5)3 = -10$, que é divisor de $h(5) = 630$.

Note que $h(5/3) = 6(5/3)^3 - (5/3)^2 - 21(5/3) + 10 = 0$.

Concluímos que 5/3 é raiz de $h(x)$.

Observação: Vale ressaltar que o teorema afirma que se p/q for raiz de $h(x)$, então $p - mq$ é divisor de $h(m)$. Porém, a recíproca não é verdadeira, conforme veremos em seguida.

3.9 Exemplo. Tome o número 10/3. Neste caso, $p = 10$, $q = 3$ e considere $m = 3$.

Agora, calculando $h(3)$, obtemos $h(3) = 6(3)^3 - (3)^2 - 21(3) + 10 = 100$.

Desta forma, $p - mq = 10 - (3)3 = 1$, que é divisor de $h(3) = 100$.

Porém, $h(10/3) = 6(10/3)^3 - (10/3)^2 - 21(10/3) + 10 = 1360/9 \neq 0$.

Concluímos que 10/3 não é raiz de $h(x)$.

3.2 Regra de Exclusão das Raízes Racionais na Forma p/q irredutíveis

3.10 Corolário. *Considere o polinômio* $h(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ ... \ + a_2x^2 + a_1x + a_0$, *com* $a_n \neq 0$, *de grau* $n > 0$ *e de* ***coeficientes inteiros***. *Seja* p/q *um número racional, em que* p *e* $q \in \mathbb{Z}^*$ *e* $M.D.C.(p, q) = 1$. *Se* $p - q$ *não for divisor de* $h(1)$ *ou se* $p + q$ *não for divisor de* $h(-1)$, *então* p/q *não é raiz de* $h(x)$.

3.11 Exemplo. Dado o polinômio $h(x) = 21x^4 - 23x^3 - 258x^2 + 32x + 96$ cujas possíveis raízes racionais são:

$\{\pm 1/21,\ \pm 2/21,\ \pm 1/7,\ \pm 4/21,\ \pm 2/7,\ \pm 1/3,\ \pm 8/21,\ \pm 3/7,\ \pm 4/7,\ \pm 2/3,\ \pm 16/21,\ \pm 6/7,$

$\pm 1,\ \pm 8/7,\ \pm 4/3,\ \pm 32/21,\ \pm 12/7,\ \pm 2,\ \pm 16/7,\ \pm 8/3,\ \pm 3,\ \pm 24/7,\ \pm 4,\ \pm 32/7,\ \pm 16/3,$
$\pm 6,\ \pm 48/7,\ \pm 8,\ \pm 32/3,\ \pm 12,\ \pm 96/7,\ \pm 16,\ \pm 24,\ \pm 32,\ \pm 48,\ \pm 96\}$.

Agora, calculando $h(1)$, obtemos $h(1) = 21(1)^4 - 23(1)^3 - 258(1)^2 + 32(1) + 96 = -132$.

Tome para verificação o número $16/7$, ou seja, $p = 16$ e $q = 7$. Sendo assim, $p - q = 16 - 7 = 9$, que não é divisor de $h(1)$. Portanto, $16/7$ não é raiz de $h(x)$.

3.3 Regra de Exclusão de Newton

3.12 Corolário (Regra de Exclusão de Newton). *Seja o polinômio $h(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ ... \ + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, com $a_n \neq 0$, de grau $n > 0$ e de* ***coeficientes inteiros****. Se o número inteiro p, diminuído de uma unidade, não dividir $h(1)$ ou, se aumentado de uma unidade, não dividir $h(-1)$, então p não é raiz da equação $h(x) = 0$. Note que esse corolário é um caso particular do corolário anterior para $q = 1$.*

3.13 Exemplo. Dado o polinômio $h(x) = 2x^3 - 21x^2 + 55x - 42$ cujas possíveis raízes racionais são $\{\pm 1/2,\ \pm 1,\ \pm 3/2,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 7/2,\ \pm 6,\ \pm 7,\ \pm 21/2,\ \pm 14,\ \pm 21,\ \pm 42\}$.
Para verificação, tome o número $p = 6$.
Agora, calculando $h(1)$, temos $h(1) = 2(1)^3 - 21(1)^2 + 55(1) - 42 = -6$.
Sendo assim, $p - 1 = 6 - 1 = 5$, que não é divisor de $h(1) = -6$.
Concluímos que 6 não é raiz de $h(x)$.
De fato, $h(6) = 2(6)^3 - 21(6)^2 + 55(6) - 42 = -36 \neq 0$.

3.14 Teorema. *Considere o polinômio $h(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ ... \ + a_2x^2 + a_1x + a_0$, com $a_n \neq 0$, de grau $n > 0$ e de* ***coeficientes inteiros.*** *Se $h(0)$ e $h(1)$ forem números ímpares, então $h(x)$ não possui raízes inteiras.*

Demonstração. Suponha que exista uma raiz racional no polinômio $h(x)$ na forma p/q, em que p e $q \in \mathbb{Z}^*$ e $M.D.C.(p, q) = 1$. Pelo teorema 3.6 temos que $p - q$ divide $h(1)$, que é ímpar, por hipótese. Logo, $p - q$ é um número ímpar. Também por hipótese, $h(0) = a_0$ é ímpar e como p é divisor de a_0, então p também é um número ímpar. Sendo assim, $p - q$ e p são números ímpares. Logo, q é par. Portanto, p/q não pode ser um número inteiro.

Outra demonstração: Suponha que p seja raiz de $h(x)$, tal que, $p \in \mathbb{Z}^*$. Já que p é raiz de $h(x)$, então pelo corolário 3.2, p é divisor de a_0. Entretanto, por hipótese, a_0 é um número ímpar, consequentemente, p também é ímpar. Agora, aplicando a *Regra de Exclusão de Newton*, vemos que $p-1$ é divisor de $h(1)$. Porém, $h(1)$ é um número ímpar e $p-1$ é um número par, pois p é ímpar. Sendo assim, $p-1$ não pode ser divisor de $h(1)$. Encontramos assim uma contradição, que ocorreu por considerar que $p \in \mathbb{Z}^*$ fosse raiz de $h(x)$.

Concluímos que se a_0 e $h(1)$ forem ímpares, então o polinômio $h(x)$, de coeficientes inteiros, não admitirá raízes de números inteiras. $\square$

3.15 Exemplo. Seja o polinômio $h(x) = 16x^4 - 48x^3 - 160x^2 + 220x + 287$. Neste caso, como $h(1) = 16(1)^4 - 48(1)^3 - 160(1)^2 + 220(1) + 287 = 315$ e $a_0 = 287$, que são ambos números ímpares, então pelo teorema anterior $h(x)$ não admite raízes inteiras. De fato, resolvendo a equação $h(x) = 0$ encontramos as seguintes raízes irracionais: $\{(2-3\sqrt{5})/2,\ (2+3\sqrt{5})/2,\ (1-\sqrt{8})/2,\ (1+\sqrt{8})/2\}$.

Observação: O fato de a_0 ou $h(1)$ ser(em) número(s) par(es) não implica que existam raízes inteiras e, também tais fatos não excluem as possibilidades de existirem raízes inteiras ou irracionais, conforme ilustraremos nos exemplos abaixo:

3.16 Exemplo. Considere o polinômio $h(x) = 3x^4 - 10x^3 - 34x^2 + 20x + 8$. Logo, temos $h(1) = 3(1)^4 - 10(1)^3 - 34(1)^2 + 20(1) + 8 \Rightarrow h(1) = -13$, que é um número ímpar e $a_0 = 8$, que é um número par. Agora, resolvendo a equação $h(x) = 0$, encontramos as seguintes raízes: $\{3-\sqrt{5},\ 3+\sqrt{5},\ (-4+\sqrt{10})/3,\ (-4-\sqrt{10})/3\}$.

3.17 Exemplo. Considere o polinômio $h(x) = x^3 - 2x^2 - 6x - 2 = 0$. Portanto, temos $h(1) = (1)^3 - 2(1)^2 - 6(1) - 2 = 0 \Rightarrow h(1) = -9$, que é um número ímpar e $a_0 = -2$, que é um número par. Agora, resolvendo a equação $h(x) = 0$, encontramos as seguintes raízes $\{-\sqrt{6},\ \sqrt{6},\ 2\}$.

Em suma, observando os exemplos 3.16 e 3.17, se a_0 ou $h(1)$ for(em) número(s) par(es) nada podemos afirmar sobre a existência de raízes inteiras no polinômio $h(x)$.

3.18 Teorema. *Considere o polinômio $h(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ \dots\ + a_2x^2 + a_1x + a_0$, com $a_n \neq 0$, de grau $n > 0$ e de* ***coeficientes inteiros****. Se a_0, a_n e $h(1)$ forem ímpares, então $h(x)$ não possui raízes racionais.*

Demonstração. Suponha que exista uma raiz racional no polinômio $h(x)$ na forma p/q, em que p e $q \in \mathbb{Z}^*$ e $M.D.C.(p,q) = 1$. Logo, $h(p/q) = 0$.

Pelo teorema 3.1 temos que p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n. Por hipótese, a_0 e a_n são números ímpares, então p e q também são números ímpares.

Tome a equação 3.1 do teorema 3.1:
$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ ... \ + a_2p^2q^{n-2} + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0$ (3.1). Agora, como p e q são números ímpares, então a paridade de cada termo dessa identidade depende dos seus respectivos coeficientes. Consequentemente, a paridade da equação 3.1 depende da soma dos coeficientes, ou seja, depende de $h(1) = a_n + a_{n-1} + \ ... \ + a_2 + a_1 + a_0$. Entretanto, por hipótese, $h(1)$ é ímpar e $a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ ... \ + a_2p^2q^{n-2} + a_1pq^{n-1} + a_0q^n$ é igual a zero, que é par. Obtemos assim uma contradição, que ocorreu por supor que p/q seria raiz de $h(x)$.

Outra demonstração: Suponha que exista uma raiz racional no polinômio $h(x)$ na forma p/q, em que p e $q \in \mathbb{Z}^*$ e $M.D.C.(p,q) = 1$. Sendo $h(0) = a_0$ e $h(1)$ números ímpares, pelo teorema 3.1 e corolário 3.7 $(p-q)|h(1)$, vemos que p é um número ímpar e q é um número par. Agora, aplicando o *Teorema das Raízes Racionais*, então q é divisor de a_n mas, por hipótese, a_n é ímpar. Encontramos assim uma contradição, pois q é par e não consegue dividir a_n, que é impar. A contradição ocorreu por supor que p/q fosse raiz de $h(x)$.

Portanto, concluímos que se a_0, a_n e $h(1)$ forem ímpares, então o polinômio $h(x)$, de coeficientes inteiros, não admitirá raízes racionais. $\square$

3.19 Exemplo. Seja o polinômio $h(x) = 5x^6 - 71x^5 + 352x^4 - 795x^3 + 792x^2 - 135x - 225$. Logo, temos, $h(1) = 5(1)^6 - 71(1)^5 + 352(1)^4 - 795(1)^3 + 792(1)^2 - 135(1) - 225 \Rightarrow h(1) = -77$. Note que $a_0 = -225$ e $a_n = 5$. Sendo assim, $h(1)$, a_0 e a_n são números ímpares, então pelo teorema anterior, $h(x)$ não admite raízes racionais. De fato, resolvendo a equação $h(x) = 0$ encontramos as seguintes raízes irracionais e complexas não reais: $\{(9-\sqrt{21})/2,\ (9+\sqrt{21})/2,\ (11-\sqrt{21})/10,\ (11+\sqrt{21})/10,\ (3+\sqrt{3}i)/2,\ (3-\sqrt{3}i)/2\}$.

Observação: De forma análoga a observação anterior, o fato de a_0, a_n ou $h(1)$ ser(em) número(s) par(es) não implica que existam raízes racionais e, também tais fatos não excluem as possibilidades de existirem raízes inteiras ou irracionais, conforme veremos nos exemplos abaixo:

3.20 Exemplo. Seja o polinômio $h(x) = 7x^6 - 20x^5 + 18x^4 + 16x^3 - 102x^2 + 132x - 45$.

Donde, $h(1) = 7(1)^6 - 20(1)^5 + 18(1)^4 + 16(1)^3 - 102(1)^2 + 132(1) - 45 \Rightarrow h(1) = 6$. Observe que $a_0 = -45$ e $a_n = 7$. Desta forma, a_0 e a_n são números ímpares e $h(1)$ é um número par. Agora, resolvendo a equação $h(x) = 0$, encontramos as seguintes raízes: $\{-\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ (13+\sqrt{29})/13,\ (13-\sqrt{29})/13,\ (1-\sqrt{11}i)/2,\ (1+\sqrt{11}i)/2\}$.

3.21 Exemplo. Seja o polinômio $h(x) = x^3 + 12x^2 + 38x + 21$. Donde, $h(1) = (1)^3 + 12(1)^2 + 38(1) + 21 \Rightarrow h(1) = 72$. Observe que $a_0 = 21$ e $a_n = 1$. Desta forma, a_0 e a_n são números ímpares e $h(1)$ é um número par. Agora, resolvendo a equação $h(x) = 0$, encontramos as seguintes raízes $\{(-5-\sqrt{13})/2,\ (-5+\sqrt{13})/2,\ -7\}$

Em suma, observando os exemplos 3.20 e 3.21, se a_0, a_n ou $h(1)$ for(em) número(s) par(es) nada podemos afirmar sobre a existência de raízes racionais no polinômio $h(x)$.

3.4 Irredutibilidade sobre $\mathbb{Q}$

3.22 Definição. Um polinômio $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$, $a_n \neq 0$, $n > 1$ e com coeficientes em $\mathbb{Q}$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ se, sempre que existirem $f(x)$ e $g(x)$, não nulos, tais que, $p(x) = f(x)g(x)$, tivermos $f(x) = a$ ou $g(x) = b$, em que a e b são constantes pertencentes ao conjunto dos números racionais.

3.23 Exemplo. Os polinômios $p(x)$ de grau 1 com coeficientes em $\mathbb{Q}$ são irredutíveis. Note que se existir $p(x) = f(x)g(x)$ e como $p(x)$ tem grau um, então $\partial p(x) = \partial[f(x)g(x)] = 1 \Rightarrow \partial p(x) = \partial f(x) + \partial g(x) = 1$. Sendo assim, $\partial f(x) = 0$ e $\partial g(x) = 1$ ou vice-versa. Portanto, $f(x)$ é uma constante ou $g(x)$ é uma constante, ambos sobre $\mathbb{Q}$.

3.24 Exemplo. O polinômio $p(x) = x^2 - 5$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$. De fato, se $p(x)$ for redutível, então existem $f(x) = x - a$ e $g(x) = x - b$, tais que, $p(x) = f(x)g(x)$. Sendo assim,

$x^2 - 5 = (x-a)(x-b) \Rightarrow$

$x^2 - 5 = x^2 - (a+b)x + ab \Rightarrow$

$$x^2 - 5 = \begin{cases} -a - b = 0 \\ ab = -5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x^2 - 5 = \begin{cases} a = -b \\ ab = -5 \end{cases} \Rightarrow -b^2 = -5 \Rightarrow b^2 = 5.$$

O que é uma contradição, pois não existe $b \in \mathbb{Q}$, tal que $b^2 = 5$. Portanto, $p(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.

3.25 Exemplo. O polinômio $p(x) = 2x^2 + x - 15$ é redutível sobre $\mathbb{Q}$, pois podemos fatorar $p(x)$, tal que, $p(x) = 2x^2 + x - 15 = (2x - 5)(x + 3)$.

3.5 Irredutibilidade sobre $\mathbb{Z}$

3.26 Definição. Denominamos por *conteúdo* de um polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$ e com coeficientes em $\mathbb{Z}$, o $M.D.C.$ dos seus coeficientes não nulos, ou seja, $M.D.C.(a_n,\ a_{n-1}, ..., a_1, a_0)$, nos quais nenhum dos $a_{i's}$, $0 \leq i \leq n$, sejam zeros.

Notação: $cont(p(x)) = M.D.C.(a_n,\ a_{n-1}, ..., a_1, a_0)$.

3.27 Exemplo. O conteúdo de $p(x) = 3x^3 + 18x - 9$ é $cont(p(x)) = M.D.C.(3, 18, 9) = 3$.

3.28 Definição. Um polinômio é denominado por *primitivo* se o seu conteúdo é 1, isto é, $cont(p(x)) = M.D.C.(a_n,\ a_{n-1}, ..., a_1, a_0) = 1$.

3.29 Exemplo. O polinômio $p(x) = -4x^4 + 9x^3 + x - 5$ é primitivo, pois $cont(p(x)) = M.D.C.(4, 9, 1, 5) = 1$.

3.30 Lema. *Considere um polinômio $p(x)$ com coeficientes inteiros e seja k também inteiro não nulo. Sendo assim, temos $cont(k \cdot p(x)) = k \cdot cont(p(x))$. Em particular, existe um $g(x)$ primitivo com coeficientes inteiros, tal que, $p(x) = cont(p(x)) \cdot g(x)$.*

Demonstração. Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ de coeficientes inteiros, então

$cont(k \cdot p(x)) = cont(k \cdot (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0)) \Rightarrow$

$cont(k \cdot p(x)) = cont(k \cdot a_n x^n + k \cdot a_{n-1}x^{n-1} + ... + k \cdot a_1 x + k \cdot a_0) \Rightarrow$

$cont(k \cdot p(x)) = M.D.C.(k \cdot a_n,\ k \cdot a_{n-1}, ..., k \cdot a_1, k \cdot a_0) \Rightarrow$

$cont(k \cdot p(x)) = k \cdot (M.D.C.(a_n,\ a_{n-1}, ..., a_1, a_0)) \Rightarrow$

$cont(k \cdot p(x)) = k \cdot cont(p(x))$. □

3.31 Definição. Um polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$ e com coeficientes em $\mathbb{Z}$ é irredutível sobre $\mathbb{Z}$ se $p(x)$ for primitivo e não for possível escrever $p(x)$ como produto de dois polinômios não constantes em $\mathbb{Z}$. Em outras palavras, $p(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Z}$ se $p(x)$ for primitivo e se existir $p(x) = f(x)g(x)$, então $f(x) = \pm 1$ ou $g(x) = \pm 1$.

3.32 Exemplo. O polinômio $p(x) = 3x + 4$ é irredutível sobre $\mathbb{Z}$, pois $M.D.C.(3,4) = 1$ e $p(x) = 1(3x + 4)$.

3.33 Exemplo. O polinômio $p(x) = -7x+21$ é redutível sobre $\mathbb{Z}$, pois $M.D.C.(7,21) = 7$. De fato, $p(x) = -7(x - 3)$.

Observação: A condição inicial para que um polinômio $p(x)$ de coeficientes em $\mathbb{Z}$ seja irredutível sobre $\mathbb{Z}$ é que o $cont(p(x)) = 1$. Pois, se $cont(p(x)) = k \neq 1$ e pelo lema 3.30 existe um polinômio $g(x)$ primitivo e de coeficientes em $\mathbb{Z}$, tal que, $p(x) = cont(p(x)) \cdot g(x) \Rightarrow p(x) = k \cdot g(x)$, ou seja, $p(x)$ é redutível sobre $\mathbb{Z}$.

Relações entre irredutibilidade de polinômios e não existência de raízes racionais.

$i)$ Irredutibilidade sobre $\mathbb{Z}$: Um polinômio $p(x)$ primitivo e com coeficientes inteiros é irredutível sobre $\mathbb{Z}$ se $p(x)$ não puder ser fatorado em dois polinômios $f(x)$ ou $g(x)$, não nulos e não constantes, tais que, $\partial f(x), \partial g(x) < \partial p(x)$. Desta forma, se um polinômio $p(x)$ primitivo, de grau maior que 1 e com coeficientes inteiros é irredutível sobre $\mathbb{Z}$, então $p(x)$ não admite raízes inteiras. De fato, se $\alpha \in \mathbb{Z}$ fosse raiz de $p(x)$, então pelo *Teorema da Decomposição* o polinômio $p(x)$ poderia ser fatorado e representado por $p(x) = (x - \alpha)q(x)$, no qual $q(x)$ é um polinômio quociente e cujos coeficientes são números inteiros.

$ii)$ Irredutibilidade sobre $\mathbb{Q}$: Um polinômio $p(x)$ com coeficientes racionais é irredutível sobre $\mathbb{Q}$, se $p(x)$ não puder ser fatorado em dois polinômios $f(x)$ ou $g(x)$, não nulos e não constantes, tais que, $\partial f(x), \partial g(x) < \partial p(x)$. De fato, se um polinômio $p(x)$ com coeficientes racionais é irredutível sobre $\mathbb{Q}$, então $p(x)$ não admite raízes racionais. Pois, se $\alpha \in \mathbb{Q}$ fosse raiz de $p(x)$, então pelo *Teorema da Decomposição* o polinômio $p(x)$ poderia ser fatorado e representado por $p(x) = (x - \alpha)q(x)$, no qual $q(x)$ é um polinômio quociente e cujos coeficientes são números racionais.

Observação: Pelo item i acima se um polinômio $p(x)$, de grau maior que 1, cujos coeficientes são números inteiros for irredutível sobre $\mathbb{Z}$, então $p(x)$ não admite números inteiros como raízes. Entretanto, o fato de um polinômio $p(x)$ ser redutível sobre $\mathbb{Z}$ não implica na existência de raízes inteiras. Essa mesma observação serve para polinômios irredutíveis sobre $\mathbb{Q}$, conforme exemplos abaixo:

3.34 Exemplo. Considere o polinômio $p(x) = x^4 - 10x^3 + 22x^2 + 70x - 203$, que é redutível sobre $\mathbb{Z}$, pois pode ser fatorado sobre $\mathbb{Z}$:

$p(x) = x^4-10x^3+22x^2+70x-203 = (x^2-10x+29)(x^2-7)$, mas $p(x)$ não admite números inteiros como raízes. De fato, as raízes complexas de $p(x)$ são:

$\{(2-3i,\ (2+3i),\ (-\sqrt{5}),\ (\sqrt{5})\}$.

3.35 Exemplo. Considere o polinômio $p(x) = \dfrac{9x^4-66x^3+175x^2-198x+130}{9}$, que é redutível sobre $\mathbb{Q}$, pois pode ser fatorado sobre $\mathbb{Q}$:

$p(x) = \dfrac{9x^4-66x^3+175x^2-198x+130}{9} = \left(\dfrac{9x^2-12x+13}{9}\right)(x^2-6x+10)$, mas $p(x)$ não admite números racionais como raízes. De fato, as raízes complexas de $p(x)$ são:

$\{(2-3i)/3,\ (2+3i)/3,\ (3-i),\ (3+i)\}$

Decidir se um polinômio $p(x)$, cujos coeficientes são números inteiros, ou racionais é, ou não, irredutível sobre $\mathbb{Z}$, ou mesmo sobre $\mathbb{Q}$, muitas vezes não é uma tarefa simples. Por isso, veremos a seguir alguns métodos para determinar se um polinômio $p(x)$, não constante, é irredutível sobre $\mathbb{Z}$.

3.6 Lema De Gauss

3.36 Lema (De Gauss). *Todo polinômio $p(x)$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$ e irredutível sobre $\mathbb{Z}$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ e vale a recíproca, isto é, todo polinômio $p(x)$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$ e irredutível sobre $\mathbb{Q}$ é irredutível sobre $\mathbb{Z}$.*

A demonstração desse lema foge ao escopo do trabalho. O leitor mais interessado pode consultar [3] e [4].

Observação: A aplicação desse lema torna a verificação de irredutibilidade de um polinômio $p(x)$ sobre $\mathbb{Q}$ mais simples, pois se esse polinômio for irredutível sobre $\mathbb{Z}$, ele será sobre $\mathbb{Q}$. Em suma, basta verificar se um polinômio é irredutivel sobre $\mathbb{Z}$. Agora, veremos a seguir um critério, chamado de *Eisenstein*, para determinar se um polinômio $p(x)$ é ou não irredutível sobre $\mathbb{Z}$ e, consequentemente, sobre $\mathbb{Q}$.

3.7 Critério de Eisenstein

3.37 Teorema (**Critério de Eisenstein**, (*Ferdinand Gotthold Max Eisenstein,* 1823-1852)). *Considere o polinômio* $h(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ ... \ + a_2x^2 + a_1x + a_0$, *com* $a_n \neq 0$, *de grau* $n > 0$ *e de* ***coeficientes inteiros***. *Se existe um número primo* p, *tal que,*

i) $p|a_0$, $p|a_1$, ..., $p|a_{n-2}$, $p|a_{n-1}$,

ii) $p \nmid a_n$ *e*

iii) $p^2 \nmid a_0$,

então $h(x)$ *é um polinômio irredutível sobre* $\mathbb{Z}$.

Notação: $p|a_i$, *p é divisor de* a_i *e* $p \nmid a_k$ *não é divisor de* a_k.

Demonstração. Suponha que $h(x)$ seja redutível sobre $\mathbb{Z}$, isto é, $h(x) = f(x)g(x)$, nos quais $f(x)$ e $g(x)$ são polinômios com coeficientes em $\mathbb{Z}$. Sendo assim,

$$1 \leq \partial[f(x)], \partial[g(x)] < \partial[h(x)] = n.$$

Considere,

$$\begin{aligned}
h(x) &= a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ ... \ + a_2x^2 + a_1x + a_0, \text{ com } a_n \neq 0, \\
f(x) &= b_rx^r + b_{r-1}x^{r-1} + \ ... \ + b_2x^2 + b_1x + b_0, \text{ com } b_r \neq 0 \text{ e} \\
g(x) &= c_sx^s + c_{s-1}x^{s-1} + \ ... \ + c_2x^2 + c_1x + c_0, \text{ com } c_s \neq 0.
\end{aligned}$$

Note que $n = r + s$ e $b_0c_0 = a_0$. Assim, como $p|a_0 \Rightarrow p|b_0c_0 \Rightarrow p|b_0$ ou $p|c_0$. Porém, $p^2 \nmid a_0$, então p divide apenas um dos dois coeficientes inteiros, b_0, c_0. Sem perda de generalidade, vamos supor que $p|b_0$ e $p \nmid c_0$. Agora, perceba que $b_rc_s = a_n$ é o coeficiente de $x^n = x^{r+s}$ e, por hipótese, $p \nmid a_n$, então $p \nmid b_r$, $p \nmid c_s$ e $p|b_0$. Considere b_i o menor coeficiente de $f(x)$, tal que, $p \nmid b_i$. Assim, pela escolha de b_i, temos $p|b_0, \ ... \ , b_{i-1}$.

Seja $a_i = b_0c_i + b_1c_{i-1} + ... + b_{i-1}c_1 + b_ic_0$ e como $p|b_0, \ ... \ , b_{i-1}$, $p \nmid b_i$ e $p \nmid c_0$, então $p \nmid a_i$, existindo assim uma contradição, pois $1 \leq i \leq r < n$. A contradição ocorreu por considerar que existem $f(x)$ e $g(x)$, tais que, $h(x) = f(x)g(x)$. Logo, $h(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Z}$. □

3.38 Exemplo. O polinômio $p(x) = 3x^5 + 12x^3 - 4x^2 + 6$ é irredutível sobre $\mathbb{Z}$, pois para $p = 2$, temos:

$i)$ $p|12, 4, 6$;

$ii)$ $p \nmid 3$ e

$iii)$ $p^2 \nmid 6$.

Consequentemente, $p(x)$ também é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.

3.39 Exemplo. O polinômio $p(x) = x^5 + 25x^4 + 5x^2 + 10x + 15$ é irredutível sobre $\mathbb{Z}$, pois para $p = 5$, temos:

$i)$ $p|25, 5, 10, 15$;

$ii)$ $p \nmid 1$ e

$iii)$ $p^2 \nmid 15$.

Consequentemente, $p(x)$ também é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.

Considere agora o polinômio $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 6$. Note que não podemos aplicar o *Critério de Eisenstein*, por isso, apresentaremos a seguir outro método para determinar se $p(x)$ é ou não irredutível sobre $\mathbb{Q}$.

3.8 Critério $f(x+c)$

3.40 Teorema (**Critério $f(x+c)$**)**.** *Considere um polinômio $p(x)$ de coeficientes em $\mathbb{Q}$ e $c \in \mathbb{Q}$. Desta forma, $p(x+c)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ se, e somente se, $p(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.*

Para demonstrar esse critério pode-se utilizar o argumento que

$$p(x) = f(x)g(x) \Leftrightarrow p(x+c) = f(x+c)g(x+c).$$

3.41 Exemplo. Seja $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 6$, então:

$f(x+1) = (x+1)^4 + (x+1)^3 + (x+1)^2 + (x+1) + 6 \Rightarrow$

$f(x+1) = x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 10x + 10$, que é irredutível sobre $\mathbb{Z}$, pois para $p = 5$, temos:

$i)$ $p|5, 10$;

$ii)$ $p \nmid 1$ e

$iii)$ $p^2 \nmid 5$.

Consequentemente, pelo lema de *Gauss* $p(x+1)$ também é irredutível sobre $\mathbb{Q}$. Agora, pelo teorema 3.40, $p(x)$ também é irredutível em $\mathbb{Q}$.

Observação: Neste capítulo apresentamos alguns resultados que podem ser aplicados com o objetivo de verificar se um polinômio $p(x)$ com coeficientes inteiros admite ou não raízes inteiras ou racionais. Tais métodos não solucionam todas as equações algébricas, entretanto na busca pela resolução de uma equação $p(x) = 0$ qualquer técnica que possa ser aplicada tem uma enorme contribuição, que tanto pode ser na solução propriamente dita, quanto muitas vezes na otimização de tempo, esforço e claro, de cálculos. Por esses motivos que foram apresentados o teorema 3.1, os corolários 3.10 e 3.12 e a irredutibilidade sobre $\mathbb{Z}$ e sobre $\mathbb{Q}$. A seguir mostraremos que a combinação dessas técnicas é uma ferramenta importantíssima na resolução de equações algébricas de coeficientes inteiros.

Tome o exemplo 3.11: Encontre as raízes do polinômio

$$h(x) = 21x^4 - 23x^3 - 258x^2 + 32x + 96.$$

Solução: Vamos iniciar a pesquisa pela solução no conjunto dos números racionais.

Primeiro: Tentaremos aplicar o *Critério de Eisenstein*, pois se o polinômio $p(x)$ for irredutível sobre $\mathbb{Z}$, consequentemente, sobre $\mathbb{Q}$, não admitirá raízes racionais e o teorema 3.1 não poderá ser empregado. Neste caso, uma vez que não é possível encontrar um número primo p que satisfaça o *Critério de Eisenstein*, então este não se aplica;

Segundo: Como o *Critério de Eisenstein* não pode ser utilizado, então pelo teorema 3.1 as possíveis raízes racionais são:

$\{\pm 1/21,\ \pm 2/21,\ \pm 1/7,\ \pm 4/21,\ \pm 2/7, \pm 1/3,\ \pm 8/21,\ \pm 3/7,\ \pm 4/7,\ \pm 2/3,\ \pm 16/21,$

$\pm 6/7\ \pm 1,\ \pm 8/7,\ \pm 4/3,\ \pm 32/21,\ \pm 12/7,\ \pm 2,\ \pm 16/7,\ \pm 8/3, \pm 3,\ \pm 24/7,\ \pm 4,\ \pm 32/7,$

$\pm\, 16/3,\ \pm 6,\ \pm 48/7,\ \pm 8,\ \pm 32/3,\ \pm 12,\ \pm 96/7,\ \pm 16,\ \pm 24,\ \pm 32,\ \ \pm 48,\ \pm 96\}.$

Terceiro: Aplicando o corolário 3.12 para excluir as "falsas" raízes inteiras, que são:

$\{1, -4,\ \pm 6,\ \pm 8,\ \pm 12,\ \pm 16,\ \pm 24,\ 32,\ \pm 48,\ \pm 96\}$

Quarto: Aplicando o corolário 3.10 para excluir as "falsas" raízes p/q, com p e q coprimos, que são:

$\{1/20,\ \pm 2/21,\ -1/7,\ \pm 4/21,\ \pm 2/7,\ \pm 8/21,\ -3/7,\ 2/3,\ -16/21,\ -6/7,\ -8/7,\ -4/3,$

$\pm\, 32/21,\ \pm 12/7,\ \pm 16/7,\ -8/3,\ \pm 24/7,\ \pm 32/7,\ \pm 16/3,\ \pm 48/7,\ \pm 32/3,\ \pm 96/7\};$

Agora, excluindo essas “falsas candidatas” e testando as outras possibilidades encontramos $\{-3,\ 4,\ 2/3,\ -4/7\}$ como raízes de $p(x)$.

Capítulo 4

Miscelânea

4.1 Exercícios Propostos

1. UPE(2005-MAT2)-Considere a, b e c raízes da equação $3x^3 - 13x^2 + 18x - 8 = 0$. Sabendo que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{c}$, pode-se afirmar que $\left(\frac{ab}{3} + c\right)$ é igual a:
   (a) 2 (b) -2 (c) 3 (d) -3 (e) 1

2. COVEST(2002.2-MAT3)-Determine os reais a, b e c tais que o polinômio $x^4 - 63x^2 + 22x + d$, d real, se fatora como $(x^2 + x + a)(x^2 + bx + c)$. Calcule a maior raiz do polinômio de grau 4.

3. COVEST(2004.2-MAT2)-Sejam a e b números reais tais que
$$\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} = \frac{14x+4}{x^2-1},$$
para todo número real x, diferente de 1 e -1. Indique ab.

4. Demonstre que $\sqrt[3]{5}$ não é um número racional.

5. Demonstre que o número $\sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}}$ é um número inteiro.

6. Demonstre que $cos\ 20°$ é um número irracional.

7. ITA(1975)-Se a, b e c são raízes da equação $x^3 - rx + 20 = 0$, onde r é um número real, podemos afirmar que o valor de $a^3 + b^3 + c^3$ é:
   (a) -60 (b) $62 + r$ (c) $62 + r^2$ (d) $62 + r^3$ (e) $62 - r$

8. Determine as raízes do polinômio $p(x) = x^4 - 4x^3 - 4x - 1$, sabendo que uma de suas raízes é o número $\sqrt{9+\sqrt{80}}$.

9. ITA(2002)-Sabe-se que a equação $x^3 - px^2 = q^m$, $p, q > 0$, $q \neq 1$, $m \in \mathbb{N}$, possui três raízes reais e positivas a, b e c, então

$$log_q \left[abc\left(a^2+b^2+c^2\right)^{a+b+c}\right]$$

é igual a:

(a) $2m + p \cdot log_q\ p$

(b) $m + 2p \cdot log_q\ p$

(c) $m + p \cdot log_q\ p$

(d) $m - p \cdot log_q\ p$

(e) $m - 2p \cdot log_q\ p$

10. Considere a, b e c raízes da equação $x^3 - 2x^2 + 4x - 2 = 0$, tais que, a, b e $c \neq 1$. Assim, seja

$$M = \left(\frac{a^{3/2}}{a-1} + \frac{b^{3/2}}{b-1} + \frac{c^{3/2}}{c-1}\right)^2.$$

Qual o valor de M?

(a) 8 (b) 4 (c) 2 (d) 18 (e) 20

11. IME(2004)-Considere o polinômio $p(x) = x^3 + ax + b$ de coeficientes reais, com $b \neq 0$. Sabendo que suas raízes são reais, demonstre que $a < 0$.

12. IME(2007)-Seja $p(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ um polinômio do terceiro cujas raízes são termos de uma progressão aritmética de razão 2. Sabendo que $p(-1) = -1$, $p(0) = 0$ e $p(1) = 1$, os valores de α e γ são, respectivamente:

(a) 2 e -1 (b) 3 e -2 (c) -1 e 2 (d) $-1/3$ e $4/3$ (e) $1/2$ e $1/2$

13. Resolva as equações abaixo, sabendo que a segunda equação possui uma raiz que é o triplo de outra raiz da primeira.

$$x^3 - 11x^2 + 28x - 21 = 0 \text{ e } x^3 - 27x^2 + 131x - 105 = 0.$$

4.2 Resoluções dos Exercícios Propostos

1. Aplicando as *Relações de Girard* e sabendo que a, b e c são raízes do polinômio $3x^3 - 13x^2 + 18x - 8$ podemos notar que:

$$\begin{cases} (I) abc = \dfrac{-(-8)}{3} = \dfrac{8}{3} \\ (II) ab + ab + bc = \dfrac{18}{3} = 3 \\ (III) \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{2}{c} \Rightarrow \dfrac{bc + ac}{abc} = \dfrac{2ab}{abc} \end{cases}.$$

Pela equação III vemos que $bc + ac = 2ab$ e substituindo em II temos:

$ab{+}2ab = 6 \Rightarrow 3ab = 6 \Rightarrow ab = 2$ e substituindo em I encontramos $2c = \dfrac{8}{3} \Rightarrow c = \dfrac{4}{3}$.

Agora, podemos calcular o valor da expressão pedida sabendo que $ab = 2$ e $c = 4/3$:

$\dfrac{ab}{3} + c = \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{3} = \dfrac{6}{3} = 2.$

Resposta: Alternativa A

2. Dado $(x^2 + x + a)(x^2 + bx + c) \Rightarrow x^4 + (b + 1)x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + c)x + ac$ e igualando com o polinômio $x^4 + 0x^3 - 63x^2 + 22x + d$, temos:

$$\begin{cases} b + 1 = 0 \\ a + b + c = -63 \\ ab + c = 22 \\ ac = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -1 = 0 \\ a + (-1) + c = -63 \\ a(-1) + c = 22 \\ ac = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = -62 \\ -a + c = 22 \\ ac = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c = -40 \\ ac = d \end{cases} \Rightarrow$$

$a + c = -62 \Rightarrow a = -62 + 20 \Rightarrow a = -42$ e $ac = d \Rightarrow d = (-42)(-20) = 840.$

Donde $x^4 - 63x^2 + 22x + d \Rightarrow x^4 - 63x^2 + 22x + 840$ e $(x^2 + x + a)(x^2 + bx + c) \Rightarrow (x^2 + x - 42)(x^2 - x - 20)$, cujas raízes de $(x^2 + x - 42)$ são $\{-7, 6\}$ e de $(x^2 - x - 20)$ são $\{-4, 5\}$. Portanto, a maior raiz é 6.

3. $\dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-1} = \dfrac{14x + 4}{x^2 - 1} \Rightarrow a(x-1) + b(x+1) = 14x+4 \Rightarrow ax-a+bx+b = 14x+4 \Rightarrow$

$(a + b)x - a + b = 14x + 4 \Rightarrow \begin{cases} a + b = 14 \\ -a + b = 4 \end{cases}.$

Agora, resolvendo esse sistema, temos $2b = 18 \Rightarrow b = 9$ e $a + b = 14 \Rightarrow a + 9 = 14 \Rightarrow a = 5$. Donde, $ab = 9 \cdot 5 = 45$.

4. Seja $x = \sqrt[3]{5} \Rightarrow (x)^3 = (\sqrt[3]{5})^3 \Rightarrow x^3 = 5 \Rightarrow x^3 - 5 = 0$. Note que $\sqrt[3]{5}$ é raiz dessa equação. Agora, aplicando o teorema das *raízes racionais*, essas raízes, se existirem, são $\{\pm 1,\ \pm 5\}$. Portanto, $\sqrt[3]{5}$ não é um número racional.

5. Considere $x = \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$, $a = \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}$ e $b = \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$, então $x = a + b$. Sendo assim:

   $x^3 = (a+b)^3 \Rightarrow x^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \Rightarrow x^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3 \Rightarrow$

   $x^3 = a^3 + 3abx + b^3$. Entretanto,

   $a = \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} \Rightarrow a^3 = 9 + 4\sqrt{5}$,

   $b = \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} \Rightarrow b^3 = 9 - 4\sqrt{5}$ e

   $ab = \sqrt[3]{(9+4\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})} = \sqrt[3]{81-80} = 1$.

   Logo, $x^3 = a^3 + 3abx + b^3 \Rightarrow x^3 = 9 + 4\sqrt{5} + 3(1)x + 9 - 4\sqrt{5} \Rightarrow x^3 - 3x - 18 = 0$. Agora, aplicando o teorema 3.1 vemos que as possíveis raízes racionais são:

   $\{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6,\ \pm 9,\ \pm 18\}$ e realizando as tentativas vemos que 3 é raiz da equação encontrada. Assim, dividindo o polinômio $x^3 - 3x - 18$ por $x - 3$, obtemos o polinômio quociente $x^2 + 3x + 6$. Agora, ao tentar resolver a equação $x^2 + 3x + 6 = 0$ vemos que o discriminante é -15, ou seja, não possui raízes reais. Portanto, $\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} = 3$.

6. Lembrando que $cos\ 3\theta = 4cos^3\ \theta - 3cos\ \theta$ e considerando $\theta = 20°$, então

   $cos\ 60° = 4cos^3\ 20° - 3cos\ 20° \Rightarrow$

   $1/2 = 4cos^3\ 20° - 3cos\ 20° \Rightarrow$

   $8cos^3\ 20° - 6cos\ 20° - 1 = 0$. Agora, tome $cos\ 20° = x$, então $8x^3 - 6x - 1 = 0$. Logo, $cos\ 20°$ é raiz dessa equação. Aplicando o teorema 3.1 as possíveis raízes racionais, são $\{\pm 1/8,\ \pm 1/4,\ \pm 1/2,\ \pm 1\}$ e realizando as tentativas vemos que nenhuma dessas possibilidades é raiz da equação encontrada. Logo, $cos\ 20°$ é um número irracional.

7. Dada a equação $x^3 - rx + 20 = 0 \Rightarrow x^3 + 0x^2 - rx + 20 = 0$ e aplicando o teorema 2.33 temos $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$. Logo,

   $S_1 + a_1 = 0 \Rightarrow S_1 = 0$;

   $S_1 + a_1 = 0 \Rightarrow S_1 = -a_1$;

   $S_2 + a_1S_1 + 2a_2 = 0 \Rightarrow S_2 = -a_1S_1 - 2a_2 \Rightarrow S_2 = -0(S_1) - 2(-r) \Rightarrow S_2 = 2r$;

   $S_3 + a_1S_2 + a_2S_1 + 3a_3 = 0 \Rightarrow S_3 = -a_1S_2 - a_2S_1 - 3a_3 \Rightarrow$

$S_3 = -(0)(2r) - (-r)(0) + 3(20) \Rightarrow S_3 = -60.$

Resposta: Alternativa A

8. Note que o teorema 2.40 não pode ser aplicado enquanto o número irracional estiver forma $\sqrt{9+\sqrt{80}}$. Assim, precisamos transformá-lo na forma $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. Logo, $\sqrt{9+\sqrt{80}} \Rightarrow (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = (\sqrt{9+\sqrt{80}})^2 \Rightarrow a + 2\sqrt{ab} + b = 9 + \sqrt{80} \Rightarrow a + b + \sqrt{4ab} = 9 + \sqrt{80} \Rightarrow a + b = 9$ e $ab = 20$. Observe que podemos montar uma equação quadrática, cuja soma das raízes é 9 e o produto é 20, ou seja, $x^2 - 9x + 20 = 0$. Agora, resolvendo essa equação encontramos $x_1 = r = 4$ ou $x_2 = s = 5$, ou permutando essas respostas. Logo, $\sqrt{9+\sqrt{80}} = \sqrt{4}+\sqrt{5} = 2+\sqrt{5}$. Desta maneira, como os coeficientes do polinômio $p(x) = x^4 - 4x^3 - 4x - 1$ são racionais e $2+\sqrt{5}$ é raiz de $p(x)$, então $2-\sqrt{5}$ também é raiz de $p(x)$.
Logo, $x^4 - 4x^3 - 4x - 1 = (x - 2 - \sqrt{5})(x - 2 + \sqrt{5})q(x) \Rightarrow$
$x^4 - 4x^3 - 4x - 1 = (x^2 - 4x - 1)q(x) \Rightarrow q(x) = x^2 + 1$, cujas raízes de $q(x)$ são $\pm i$.
Portanto, as raízes de $p(x) = x^4 - 4x^3 - 4x - 1$ são $\{2 \pm \sqrt{5},\ \pm i\}$.

9. Dada a equação $x^3 - px^2 = q^m \Rightarrow x^3 - px^2 + 0x - q^m = 0$ e pelas *Relações de Girard* vemos que:
$$\begin{cases} a+b+c = p \\ ab+ac+bc = 0 \\ abc = q^m \end{cases}.$$
Porém, $a+b+c = p \Rightarrow (a+b+c)^2 = p^2 \Rightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc) = p^2 \Rightarrow$
$a^2+b^2+c^2 = p^2 - 2(0) \Rightarrow a^2+b^2+c^2 = p^2.$
Agora, substituindo essas incognitas encontradas na equação dada temos:
$log_q \left[abc\,(a^2+b^2+c^2)^{a+b+c}\right] \Rightarrow log_q\ \left[q^m\,(p^2)^p\right] \Rightarrow log_q\, q^m + log_q\, p^{2p} \Rightarrow m + 2p \cdot log_q\, p.$

Resposta: Alternativa B.

10. Dada a equação $x^3 - 2x^2 + 4x - 2 = 0 \Rightarrow x^3 = 2x^2 - 4x + 2 \Rightarrow x^3 = 2(x^2 - 2x + 1) \Rightarrow x^3 = 2(x-1)^2$. Sendo assim, para $x = a$ temos $a^3 = 2(a-1)^2$, para $x = b$ temos $b^3 = 2(b-1)^2$ e para $x = c$ temos $c^3 = 2(c-1)^2$. Agora, tome a equação M :
$$M = \left(\frac{a^{3/2}}{a-1} + \frac{b^{3/2}}{b-1} + \frac{c^{3/2}}{c-1}\right)^2 \Rightarrow M = \left(\frac{(a^3)^{1/2}}{a-1} + \frac{(b^3)^{1/2}}{b-1} + \frac{(c^3)^{1/2}}{c-1}\right)^2 \Rightarrow$$
$$M = \left(\frac{[2(a-1)^2]^{1/2}}{a-1} + \frac{[2(b-1)^2]^{1/2}}{b-1} + \frac{[2(c-1)^2]^{1/2}}{c-1}\right)^2 \Rightarrow$$

$$M = \left(\frac{\sqrt{2}(a-1)}{a-1} + \frac{\sqrt{2}(b-1)}{b-1} + \frac{\sqrt{2}(c-1)}{c-1} \right)^2.$$

$M = \left(\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow M = (3\sqrt{2})^2 = 18.$

Resposta: Alternativa D

11. Dada o polinômio $p(x) = x^3 + ax + b$ e considere α_1, α_2 e α_3 raízes de $p(x)$. Agora, aplicando as *Relações de Girard* temos:

$$\begin{cases} (i)\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ (ii)\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = a \\ (iii)\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -b \end{cases}$$

Por i : $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \Rightarrow (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 = 0^2 \Rightarrow$

$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) = 0 \Rightarrow \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = \dfrac{-(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)}{2}$,

mas por ii $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = a$, então $a = \dfrac{-(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)}{2} < 0$, pois as raízes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ são números reais, não todas nulas, já que $b \neq 0$. Assim, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 > 0$ e consequentemente, $-(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) < 0$.

12. Dada o polinômio $p(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ e como $p(0) = 0$, então:
$p(0) = \alpha(0)^3 + \beta(0)^2 + \gamma(0) + \delta = 0 \Rightarrow \delta = 0$. Já que, $p(1) = 1$ e $p(-1) = -1$, então:

$$\begin{cases} \alpha(1)^3 + \beta(1)^2 + \gamma(1) = 1 \\ \alpha(-1)^3 + \beta(-1)^2 + \gamma(-1) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ -\alpha + \beta - \gamma = -1 \end{cases} \Rightarrow 2\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0.$$

Agora, como as raízes da equação estão em progressão aritmética de razão $r = 2$, então seja a uma dessas raízes. Sendo assim, tome $a - r$, a e $a + r$ como sendo as três raízes da equação. Logo, $a - 2 + a + a + 2 = \beta = 0 \Rightarrow a = 0$. Portanto, as raízes de $p(x)$ são $\{-2, 0, 2\}$.

Já descobrimos que $p(x) = \alpha x^3 + \gamma x$ e como $\{-2, 0, 2\}$ são raízes de $p(x)$, então $p(x) = \alpha(x-2)(x+2)x = \alpha(x^3 - 4x)$. Porém, $p(1) = 1$, então $\alpha[1^3 - 4(1)] = 1 \Rightarrow -3\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = -1/3$.

Para obter γ tome $p(x) = (-1/3)x^3 + \gamma x \Rightarrow p(1) = (-1/3)(1)^3 + \gamma = 1 \Rightarrow \gamma = 4/3$.

Resposta: Alternativa D

13. Considere que a seja raiz de ii e m raiz de i, tais que $a = 3m$. Sendo assim,

$i)$ $x^3 - 11x^2 + 31x - 21 = 0$ e $ii)$ $x^3 - 27x^2 + 131x - 105 = 0$

$$\begin{cases} m^3 - 11m^2 + 31m - 21 = 0 \;\; [x(-27)] \\ (3m)^3 - 27(3m)^2 + 131(3m) - 105 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -27m^3 + 297m^2 - 837m + 567 = 0 \\ \;\;27m^3 - 243m^2 + 393m - 105 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$54m^2 - 444m + 462 = 0 \Rightarrow 18m^2 - 148m + 154 = 0$. Agora, resolvendo essa equação encontramos $m_1 = 7$ e $m_2 = 11/9$ como raízes, mas apenas o número 7 satisfaz i. Desta forma, 7 é a raiz da equação i e 21 é raiz de ii. Assim, dividindo a equação i por $x - 7$ encontramos como polinômio quociente $q_1 = x^2 - 4x + 3$, cujas raízes são 3 e 4 e de forma análoga, dividindo a equação ii por $x - 21$ encontramos o polinômio quociente $q_2 = x^2 - 6x + 5$, de raízes 1 e 5. Concluímos que as raízes da equação $x^3 - 11x^2 + 31x - 21 = 0$ são $\{1, 3, 7\}$ e da equação $x^3 - 27x^2 + 131x - 105 = 0$ são $\{1, 5, 21\}$.

Referências Bibliográficas

[1] NETO, Aref Antar; LAPA, Nilton; SAMPAIO, José Luiz Pereira; CAVALLANTTE, Sidney Luiz. **Noções de Matemática:** Números Complexos, Polinômios e Equações Algébricas. 1^a ed. São Paulo: Editora Moderna, 1982. v.7.

[2] OLIVEIRA, Marcelo Rufino de. **Coleção Elementos da Matemática:** Números Complexos, Polinômios, Geometria Analítica. 1^a ed. Belém: Editora Vestseller, 2013. v. 4. 353 p.

[3] GONÇALVES, Adilson. **Introdução à Álgebra:** 5^a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006. 194p.; (Projeto Euclides).

[4] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar:** Polinômios 1^a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 248p. v.6.; (Coleção Professor de Matemática; 29).

[5] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar:** Geometria Analítica. 4^a ed. São Paulo: Atual 1993. v.7.

[6] GARCIA, Arnaldo; LEQUAIN, Yves. **Elementos de Álgebra.** 4ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006. 326 p. (Projeto Euclides).

[7] Asociación Fondo de Investigadores y Editores. **Compendio Académico de Matemática:** Álgebra. 3^a ed. Lima-Peru: Lumbreras Editores, 2010.

[8] GUIMARÃES, Caio dos Santos. **Matemática em Nível ITA/IME:** Números Complexos e Polinômios. São José dos Campos: Vestseller, 2008. v. 1. 324p.

[9] Instituto de Ciências Y Humanidades. Association Fondo de Investigadores y Editores. **Algebra:** Tomo I. Lima-Peru: Lumbreras Editores, 2011

[10] Instituto de Ciências Y Humanidades. Association Fondo de Investigadores y Editores. **Algebra:** Tomo II. Lima-Peru: Lumbreras Editores, 2011

[11] GUIMARÃES, Paulo Sérgio. **Equações Algébricas.** Santa Maria: Editora da UFSM, 2006. 96p.

[12] LIMA, Nogueira de Rosana. **Resoluções de equações de terceiro grau através de cônicas.** 1999. 173 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Departamento de Matemática, Pontífica Universidadde Católica, São Paulo, 2006.

[13] ANDRADE, Lenimar Nunes de. Raízes racionais de uma equação algébrica de coeficientes inteiros. **Revista do Professor de Matemática.** Rio de Janeiro. Sociedade Brasileira de Matemática. n.14.

[14] COSTA, Valdir Soares da. **Uma Introdução aos Polinômios Simétricos e Aplicações.** 2003. 52 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Matemática, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2003.

[15] COSTA, Valdir Soares da. **Quocientes em Anéis de Polinômios.** 2009. 89 f. Monografia (Especialização em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina - Universidade Virtual do Estado do Maranhão, Barra do Corda, 2009.

[16] Disponível em: <http://www.vestibular.ita.br/> . Acesso em: 03/04/2016.

[17] Disponível em: <http://www.ime.eb.br/provas-anteriores-cfg.html/> . Acesso em: 03/04/2016.

[18] Disponível em: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/ history/Biographies/ Vandermonde.html> . Acesso em: 16/04/2016.

[19] Disponível em: <http://www.uff.br/sintoniamatematica/curiosidadesmatematicas/ curiosidadesmatematicas-html/audio-gauss-br.html> . Acesso em: 29/06/2016.

[20] Disponível em: < https://pt.wikipedia.org/wiki/$Bhaskara\_II$ > .
Acesso em: 22/08/2016.