UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO - UFRPE

PRO-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO ENSINO DAS CIÊNCIAS

MESTRADO

EQUAÇÕES QUADRÁTICAS: ARTICULANDO SUAS FORMAS ALGÉBRICAS E GEOMÉTRICA VIA UM APLICATIVO AD HOC

José Edeson de Melo Siqueira

Recife, fevereiro de 2009.

José Edeson de Melo Siqueira

EQUAÇÕES QUADRÁTICAS:
ARTICULANDO SUAS FORMAS ALGÉBRICAS E GEOMÉTRICA VIA UM APLICATIVO AD HOC

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências, (PPGEC), da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino das Ciências.

Autor: José Edeson de Melo Siqueira

Orientador: Dr. Franck Gilbert René Bellemain.

Recife, fevereiro de 2009.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO - UFRPE

PRO-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO ENSINO DAS CIÊNCIAS

EQUAÇÕES QUADRÁTICAS:
ARTICULANDO SUAS FORMAS ALGÉBRICAS E GEOMÉTRICA VIA UM APLICATIVO AD HOC

José Edeson de Melo Siqueira

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora composta pelos seguintes professores:

____

Professor Dr. Franck Gilbert René Bellemain
Orientador

____

Professora Verônica Gitirana Gomes Ferreira, PhD
1ª Examinadora - UFPE

____

Professor Dr. Abraão Juvêncio de Araújo
2º Examinadora – UFPE

____

Professora Drª. Anna Paula de Avelar Brito Menezes
3ª Examinador – UFRPE

Dissertação aprovada no dia 27 de Fevereiro de 2009 no Departamento de Educação da UFRPE.

AGRADECIMENTOS

A Deus, criador dos céus e da terra, que conhece todas as coisas, a fonte de todo conhecimento, seja a honra e a glória. Obrigado Senhor!

A minha amada esposa Nívia, esteve comigo pacientemente todo tempo, dando-me carinho, apoio e incentivo, sendo acima de tudo companheira.

Aos meus queridos pais, José de Almeida Siqueira (In memorian) e Mariluce Siqueira que sonharam juntos comigo e se doaram para fazer do sonho realidade.

Aos meus irmãos, Welliton, Werlly, Wellitânia, Wellia e Wênia, que sempre acreditaram.

Ao meu orientador Franck Bellemain, por ser tão solícito, companheiro e acima de tudo pelas grandes contribuições que proporcionaram o desenvolvimento deste trabalho e a minha formação como pesquisador.

Ao meu amigo Agilson Nascimento, um verdadeiro irmão, companheiro de todos os momentos.

Ao professor Paulo Figueiredo e a professora Verônica Gitirana, que tem me acompanhado deste a graduação sendo responsáveis por despertar em mim o prazer pela docência e pela pesquisa em Educação Matemática.

Ao professor Abraão Juvêncio, pelo incentivo, disponibilidade e orientações que proporcionaram significativas contribuições em minha formação acadêmica.

Aos professores e colegas do programa de pós-graduação em Ensino das Ciências.

A todos os colegas professores que conviveram comigo nesse período.

RESUMO

Os propósitos dessa pesquisa consistiram em fazer uma averiguação, na tentativa de compreender melhor as razões das dificuldades dos estudantes da 3ª série do ensino médio (dois grupos: 10 na fase preliminar e 06 na segunda fase) em articular os registros algébricos e o gráfico da equação quadrática, bem como, definir e desenvolver uma ferramenta computacional que fosse capaz de favorecer essa conversão. Vista de maneira fragmentada, a conversão entre esses dois registros tem sido tratada como sendo trivial, todavia vários estudos têm demonstrado que isso não corresponde à realidade, uma vez que os alunos não compreendem bem essa conversão, mesmo estando na fase final do ensino médio. Para buscarmos respostas a essas indagações, desenvolvemos nossa pesquisa centrada na *Teoria dos registros de representações semióticas* de Duval (2005). Já a partir das ideias da *Transposição informática* de Balacheff (1993), desenvolvemos o aplicativo *Formas*, tomando por base as necessidades de articular concomitantemente equações e gráfico, considerando uma apreensão global e evidenciando as variáveis visuais correspondentes às unidades simbólicas. A investigação das dificuldades levou-nos a classificá-las em quatro tipos, identificadas inicialmente na fase preliminar e novamente evidenciados na atividade 1 da segunda fase. Constatamos a eficiência do aplicativo como ferramenta na articulação do gráfico com as equações, ao analisarmos os procedimentos adotados na atividade 2, comparados com os da atividade 1, que proporcionaram aos alunos refletirem sobre seus procedimentos na identificação das dificuldades e compreensão de suas causas. Além disso, fez surgir outros questionamentos acerca do desenvolvimento de softwares ad hoc para aplicação em pesquisas científicas e na sala de aula, bem como, a necessidade de um trabalho mais especifico e aprofundado sobre a articulação álgebra-geometria no ensino da matemática.

Palavras-chave: equações quadráticas, articulação, formas algébricas, forma geométrica, aplicativo ad hoc.

ABSTRACT

The main aim of this paper is doing a research in order to have a better understanding of the reasons that shows how the students from the 12th grade in the secondary education (two groups: ten in the first phase and six in the second) articulate algebra records and the quadratic equation formula, as well as, defining and developing a computational tool which could be helpful to this articulation. Once seen as fragmented, the articulation between these two records has been labeled as ordinary, however, many studies have shown that it's not entirely true, since the students themselves don't understand the articulation, even those who are in the last term of secondary school. As a means to find answers to these doubts, we've developed our research focusing on *Duval Semiotic Representation Theory* (2005). Having *Balacheff Computational Transposition Theory* (1993) as an example, we've developed an application called *Formas*, mentioning the importance of linking equations and graphics at the same time, considering the global learning and attesting visual variables which match to symbolic units. The investigation of the difficulties made us classify them by four types, initially identified in the phase one and once again attested in the first activity of the second phase. We've noticed that the application is efficient as a tool, especially when articulating in the graphic with the equations, when analyzing the procedures taken in the second activity, which were compared to the first activity. They made the students think more about their actions when identifying such difficulties and understanding their causes. Besides, it allowed the surge of further questions about software developing ad hoc to apply them in scientific researches, in the classroom, as well as, the necessity of a more specific, extending very far project about the articulation of algebra and geometry when teaching mathematics.

Key words: quadratic equations, articulation, algebraic forms, geometric forms, ad hoc appliance.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

INTRODUÇÃO

A unificação entre os campos algébricos e geométricos tem sua importância destacada no processo histórico do desenvolvimento do conhecimento matemático, visto que, durante perto de vinte séculos, se tinham considerado em compartimentos estanques. Segundo Bellemain (2004), Descartes (1596-1650) introduziu o simbolismo algébrico numa forma próxima da forma que conhecemos hoje, esforçando-se para ligar geometria e álgebra através de correspondências entre métodos geométricos e algébricos.

A junção da geometria com a álgebra foi possível mediante estudos realizados no século XVII por dois franceses, René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665), que independente e quase simultaneamente criaram o que hoje é denominado de geometria analítica, a partir de uma idéia extremamente original, hoje traduzida como a criação de um sistema de coordenadas que identifica um ponto P do plano por um par de números reais (x, y). Partindo disso, podemos caracterizá-la, por um lado, como o estudo das propriedades geométricas de uma figura com base em equações e, por outro, o estudo dos pares ordenados de números (x, y) que são soluções de uma ou mais equações, por meio das propriedades de uma figura geométrica. Essencialmente, a geometria analítica traduz pontos, retas, cônicas e outras construções geométricas em expressões algébricas, as quais quando exploradas, podem revelar propriedades geométricas das figuras representadas.

A relevância da articulação entre a álgebra e a geometria, obtida através da geometria analítica, pode ser refletida não apenas nas produções científicas que deram origem a outras áreas da matemática, como a álgebra linear, mas também pelas aplicações nas mais diversas áreas científicas e tecnológicas, como as engenharias e a computação, dentre outras.

Essa articulação entre registro algébrico e registro gráfico deve ser explorada nos vários níveis de ensino, considerando suas implicações na elaboração de modelos e na resolução de problemas, tanto na matemática quanto nas outras áreas do conhecimento, como por exemplo, na física. Neste caso, dois aspectos devem ser considerados em sua abordagem na escola: a passagem das equações[1] para o gráfico[2], e a do gráfico para as equações.

> O trabalho com a geometria analítica permite a articulação entre geometria e álgebra. Para que essa articulação seja significativa para o aluno, o professor deve trabalhar as duas vias: o entendimento de figuras geométricas, via equações, e o entendimento de equações, via figuras geométricas (BRASIL, 2006, p. 77).

O trabalho com equações quadráticas, na perspectiva da geometria analítica, permite a articulação da álgebra com a geometria, satisfazendo os dois aspectos destacados anteriormente, através da passagem de suas três[3] expressões algébricas para seu gráfico correspondente, a parábola. A abordagem desse tema tem importância para todo o ensino médio, não ficando restrito a um determinado momento do ensino, haja vista as articulações com outras áreas da matemática escolar como as funções, *"bastante explorado nos currículos atuais de ensino médio, pode ter suas potencialidades ampliadas se houver uma articulação com a álgebra e a geometria"* (PERNAMBUCO, 2008, p.104 e 105).

Neste caso, o estudo da função quadrática aparece como tema privilegiado para estabelecer relações entre as representações algébricas e a gráfica, das equações quadráticas. A exploração da posição do gráfico, coordenadas do ponto de máximo/mínimo, zeros da função, deve ser realizada de forma que o aluno consiga estabelecer as relações entre o "aspecto" do gráfico e os coeficientes de suas expressões algébricas, desenvolvida, fatorada e canônica.

Além disso, pode ser estabelecida uma conexão com a própria geometria analítica, através da extensão dos processos já abordados para a equação quadrática e sua correspondente geométrica, a outras situações envolvendo outros elementos como a reta e a circunferência. Desse modo, considerando os significados geométricos de coeficientes de equações (da reta e da circunferência), de retas paralelas, perpendiculares, tangentes e secantes, podem contribuir sobremaneira para a compreensão das relações entre a geometria e a álgebra.

---

[1] Equações no sentido de expressões ou representações algébricas.
[2] Gráfico no sentido de representação gráfica.
[3] Equações quadráticas: desenvolvida ($y=ax^2+bx+c$), fatorada ($y=a(x-x')(x-x'')$) e a canônica ($y=a(x-m)^2+k$).

A mudança de registros de representações foi abordada num artigo de Duval (1988) intitulado[4]: “Gráficos e equações: a articulação entre dois registros”, onde são apresentadas análises acerca das variáveis visuais (posições e interseção com os eixos cartesianos) de gráficos da função afim y=ax+b e das unidades simbólicas significativas da equação (coeficientes positivos ou negativos, maior menor ou igual a 1, etc.), bem como, as dificuldades dos alunos do ensino médio em relação à passagem do registro gráfico para o algébrico e do algébrico para o gráfico. O autor destaca que a razão para profundas dificuldades em ler e interpretar as representações gráficas, parece está associada à falta de conhecimento das regras de correspondência semiótica, entre os registros gráficos e sua escrita algébrica. Por exemplo, a passagem de uma equação à sua representação geométrica - muito abordada no ensino - ocorre ponto a ponto, no entanto na passagem da representação gráfica para a expressão algébrica, esta abordagem tem constituído um obstáculo.

Gostaríamos de ressaltar que muito embora o trabalho de Duval (1988) e de outras pesquisas tratem da articulação entre as representações gráficas e algébricas de funções, buscamos encontrar aspectos comuns ao nosso objeto de estudo - registros de representações algébricos e o gráfico da equação quadrática – visto que todas possuem pelo menos um aspecto comum: o estudo da articulação entre os dois registros.

Assim como Duval (1988), outras pesquisas abordaram a articulação entre o registro gráfico e algébrico, e vice-versa, como Kieran (1992), Oliveira (1997), Schwarz (1995), Simões (1995), Santos (2002) e Maia (2007), e também apontaram as dificuldades tanto de alunos quando de professores ao fazerem a articulação entre forma algébrica e forma geométrica.

Estes estudos têm indicado que tais dificuldades, além de outros fatores, ocorrem em função da abordagem quase que exclusiva, por professores e livros didáticos, da passagem da equação para o gráfico.

Em pesquisa realizada por Oliveira (1997) com professores de matemática do estado de São Paulo, foi destacado o problema da representação gráfica, como

[4] No original em francês: Graphiques et Equations: L’articulation de deux registres.

sendo uma das maiores dificuldades apresentadas pelos alunos (segundo os professores entrevistados), e que os professores pouco exploram a mudança da representação geométrica para a algébrica. Ainda segundo a autora, a prática do professor com os diversos registros de função limita-se às situações propostas nos livros didáticos.

Este pensamento é compartilhado por Zuffi (1999 apud MAIA 2007, p. 27) ao destacar que o trabalho docente é fortemente influenciado pelo livro didático, no qual a ênfase está sempre nas regras em que se parte do algébrico.

No trabalho de Maia (2007) foram analisados os tipos de atividades sobre função quadrática propostas em livros didáticos[5] de matemática do ensino médio.

> O procedimento para a construção de gráficos que mais aparece em livros didáticos é aquele no qual os pontos são obtidos por substituição na expressão algébrica da função e, então localizados em um sistema cartesiano para que se possa desta maneira traçar a curva ligando estes pontos (MAIA 2007, p. 63).

Essa autora constatou que 68,4% das atividades propostas privilegiavam o procedimento para localização e/ou determinação de pontos - Duval (1988) chamou atenção para esse tipo de procedimento – e 29% a construção de gráficos. Entendemos que a maior ênfase dada à manipulação dos pontos, acaba influenciando o processo de construção dos gráficos. Já os problemas que envolvem a passagem do gráfico para a expressão algébrica correspondem a apenas 2,6 %. Isso possivelmente nos ajuda a entender a razão de tantas dificuldades por partes dos alunos em articular as expressões algébricas à representação gráfica e mais ainda quando se exige a passagem do gráfico para as equações, visto não serem abordadas atividades que envolvam o gráfico a partir de uma apreensão global qualitativa, explorando as características visuais, facilitando a passagem para a forma algébrica.

Dos trabalhos consultados e apresentados anteriormente, dois se destacaram por apresentarem uma abordagem próxima a que nós desejamos em

[5] A autora analisou três livros didáticos de matemática do ensino médio que haviam sido indicados no PNLEN – Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Médio (2005).

nossa pesquisa. Além do estudo de Duval (1988), destacamos o trabalho[6] de Maia (2007) que estudou a conversão entre a representação algébrica, na forma canônica da função quadrática, e a geométrica, considerando também a passagem da representação gráfica para a da equação, tomando por base os estudos de Duval (1988). Isso se deu a partir da elaboração de uma sequência didática que possibilitasse ao aluno enxergar o gráfico como um conjunto de variáveis visuais diretamente ligadas à escrita algébrica. Para isso, a autora utilizou o software Winplot, que favorece as modificações no gráfico a partir de alterações na expressão algébrica. Ao final, sugeriu que fossem realizados trabalhos envolvendo a articulação entre outras formas algébricas (da desenvolvida para a canônica e fatorada).

Vale ressaltar na pesquisa de Maia (2007) a existência de outro aspecto comum: a utilização de uma ferramenta computacional para proporcionar o tratamento dinâmico exigido nas articulações. Além desse, outros trabalhos ressaltaram a importância da utilização de um recurso computacional na articulação dos registros de representação algébricos e gráficos, Souza (1996), Silva, Manrique, Bianchini, Dubus, Souza (2002) e Santos (2002).

Em oposição ao procedimento mais comum adotado na articulação de gráfico e equações, “ponto a ponto”, Duval (1988) sugere uma descrição sistemática das variáveis visuais do gráfico que leve em consideração o procedimento de interpretação global das propriedades figurais, onde o conjunto traçado/eixo forma uma figura que representa um objeto descrito por uma expressão algébrica. Isto possibilita identificar as modificações realizadas no gráfico e na equação, segundo o mesmo autor.

Percebemos também que o enfoque dado a uma única forma algébrica, neste caso a desenvolvida, limita as possibilidades de ampliação do conceito de equação quadrática, dificultando o reconhecimento das outras formas algébricas de mesma representação gráfica. Desse modo, estendemos a articulação tanto internamente, entre as expressões algébricas, quanto externamente, entre as

[6] Muito embora nossa pesquisa não trate das funções, mas da articulação das formas algébricas para a forma geométrica, e vice-versa, da equação quadrática, esse trabalho juntamente com Duval (1988), são relevantes para nosso estudo, por tratarem dessas passagens na perspectiva dos registros de representações semióticas considerando a interpretação global das propriedades figurais.

equações e o gráfico, através do processo de fatoração das expressões algébricas para chegar à forma fatorada e pelo processo de completar quadrado para forma canônica da equação quadrática.

Daí, sentimos a necessidade de propor um trabalho que articule o registro gráfico (forma geométrica) aos registros algébricos da equação quadrática (formas algébricas, desenvolvida, fatorada e canônica), fazendo uso de uma ferramenta computacional que possibilite o tratamento dinâmico desses registros, bem como, identificar e compreender as dificuldades que possam emergir dessas articulações.

Em nosso estudo, objetivamos compreender as razões das dificuldades dos estudantes em articular os registros algébricos e gráfico da equação quadrática, e não acentuar a compreensão de uma noção matemática. Duval (2005) chama a atenção para estes tipos de conversões[7], como aquelas mais difíceis mesmo para alunos do último ano do ensino médio.

Desse modo, desejamos inicialmente identificar e categorizar os tipos de dificuldades apresentadas pelos alunos da 3ª série do ensino médio ao realizarem essas conversões. Em seguida, elaborar um grupo de atividades, a partir da análise da primeira, para ser aplicado com outro grupo de alunos, também da 3ª série, desta vez auxiliada pela utilização de um software que permita uma abordagem dinâmica do gráfico e de suas equações correspondentes. Dessa maneira, esperamos melhor compreender as dificuldades dos alunos e também obter informações que possam subsidiar uma análise das implicações do uso de um programa computacional nessas articulações.

Após analisarmos alguns softwares e termos constatado que não atendiam as especificidades do nosso estudo, decidimos desenvolver um aplicativo ad hoc que possibilitasse realizar alterações nos coeficientes das equações e ao mesmo tempo mudanças no seu gráfico. Do mesmo modo, os movimentos do gráfico, através dos pontos, incluindo aqueles que influem diretamente na configuração de cada expressão algébrica - como as interseções com os eixos e o vértice – devem provocar mudanças nas equações.

---

[7] Conversão no sentido de Duval (2005), implica numa transformação que constitui em mudança de registro. Por exemplo, a passagem de uma equação para o gráfico.

No estudo das expressões algébricas - também denominadas de formas algébricas - da equação quadrática e da parábola, sua representação geométrica - aqui também chamada de forma geométrica – temos formas diferentes de relacionar o mesmo objeto matemático. Vale ressaltar que não é o nosso interesse tratar do estudo das cônicas, mas das formas algébricas da equação quadrática - a desenvolvida, a canônica e a fatorada - observando que todas apresentam a mesma representação geométrica no plano cartesiano, denominada de parábola.

1. PROBLEMÁTICA

A seguir, apresentamos duas questões, que determinaram nossa problemática:

- Que dificuldades podem ser apresentadas por estudantes da 3ª série do ensino médio, ao realizarem a conversão entre a forma geométrica e as formas algébricas?

- A utilização de um *aplicativo ad hoc*[8] poderá elucidar as dificuldades apresentadas pelos alunos na conversão entre forma geométrica e formas algébricas?

2. OBJETIVOS

Com base nas questões de pesquisa elaboramos o objetivo geral a seguir.

2.1. OBJETIVO GERAL

Analisar como alunos da 3ª série do ensino médio realizam a conversão entre a forma geométrica (parábola) e as formas algébricas (equações quadráticas).

2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Após a apresentação do objetivo geral, destacamos três objetivos específicos que orientaram nosso estudo.

- Investigar as dificuldades apresentadas por alunos da última série do ensino médio, ao realizarem as articulações entre a parábola e as equações quadráticas.

[8] Ad hoc é uma expressão latina que quer dizer "com este objetivo". Geralmente significa uma solução designada para um problema ou tarefa específica. Neste caso desenvolvido para responder às necessidades da nossa pesquisa.

- Analisar as implicações de um *aplicativo ad hoc* no diagnóstico das dificuldades na conversão da forma geométrica (parábola) para as formas algébricas (equações quadráticas).

- Definir e desenvolver um aplicativo ad hoc a partir das necessidades da pesquisa.

3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A seguir serão apresentadas discussões teóricas acerca do que constitui a forma algébrica, bem como uma descrição de como se deu a articulação entre esta e a forma geométrica, a partir de um breve relato da historicidade do desenvolvimento destas ideias. Em seguida, direcionaremos o estudo para três formas algébricas da equação quadrática, descrevendo a evolução do conceito dos problemas do 2º grau, centrado na correspondência entre as expressões algébricas e sua correspondente representação geométrica. Por fim, serão discutidas as ideias que fundamentarão o estudo focado na Teoria dos registros de representação semiótica.

3.1. FORMAS ALGÉBRICAS E FORMA GEOMÉTRICA[9] DA EQUAÇÃO QUADRÁTICA

Existem algumas formas algébricas de escrever a equação quadrática, e cada uma tem sua funcionalidade, trazendo um conjunto de informações sobre sua representação geométrica. Daí a necessidade de se trabalhar as várias formas algébricas, uma vez que se buscam articulações com a forma geométrica.

Segundo Bellemain (2004) a funcionalidade de uma expressão algébrica, no sentido de Chevallard (1989), é caracterizada pelos tratamentos ou deduções que essa expressão permite. Trata-se de informações que podem ser obtidas diretamente da expressão, sem precisar transformá-la. Esses tipos de expressões são chamadas de formas pelo fato de que as representações simbólicas têm uma dimensão perceptiva, uma vez que uma das funções do simbolismo é facilitar o trabalho da percepção, isto é, identificar determinadas propriedades sem ter necessariamente que desenvolver cálculos.

[9] Neste trabalho, o termo formas algébricas refere-se às expressões algébricas ou equações, e forma geométrica ao gráfico correspondente.

De fato, parece mais fácil encontrar as raízes de uma equação 2º grau a partir de sua forma fatorada, como por exemplo, seja $y = (x+2)(x-1)$ fazendo y=0, temos como raízes -2 e 1, do que na forma canônica $y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$ ou forma desenvolvida $y = x^2 + x - 2$, ambas correspondentes à primeira, que exigiriam o desenvolvimento de cálculos para encontrá-las. No caso da forma desenvolvida $y = x^2 + x - 2$, poderia ser utilizada a fórmula de Bhaskara para tal.

Vale salientar que, se observarmos a representação geométrica dessas equações, descobriremos que determinadas características específicas como, a interseção com o eixo das abscissas, com o eixo das ordenadas ou, então, as coordenadas do vértice, são destacadas explicitamente em cada uma das três formas algébricas aqui exploradas.

> Essa organização das expressões algébricas em torno de formas funda a pertinência do reconhecimento de formas algébricas uma vez que esse reconhecimento dá acesso a uma forma e, por meio dela, aos diversos tratamentos possíveis de uma expressão (BELLEMAIN, 2004, p. 03).

A organização das expressões algébricas em torno de formas implica em reconhecer uma expressão: e a partir dos diversos tratamentos possíveis, por exemplo, da fatoração desta, podermos ter acesso a outras expressões equivalentes. Desse modo, uma mesma expressão pode ser escrita de outras maneiras, tendo cada uma a finalidade de destacar propriedades específicas, tanto no que diz respeito às equações quanto à sua representação geométrica.

3.1.1. Breve histórico epistemológico - geometria analítica: articulação entre as formas algébricas e a forma geométrica

Para melhor compreender a articulação entre forma algébrica e forma geométrica, faremos uso de um breve histórico acerca da evolução do conceito da equação quadrática ou equação do 2º grau, e posteriormente como chegou-se à sua representação geométrica.

O estudo das equações quadráticas tem sua origem na resolução de problemas do segundo grau.

> Muitos textos de problemas do período babilônio antigo mostram que a solução da equação quadrática completa não constituía dificuldade séria para os babilônios,[...]
> [...] tais equações teriam sido tratadas eficientemente pelos babilônios em alguns dos mais antigos textos de problemas.
> Tão numerosos são os problemas em que se pede achar dois números dados seu produto e/ou sua soma ou sua diferença, que eles parecem ter sido para os antigos, tanto babilônios quanto gregos, uma espécie de forma "normal" à qual as quadráticas se reduzem (BOYER, 2001, p. 21, 22).

Problemas que recaem numa equação do segundo grau estão entre os mais antigos da Matemática. Ainda segundo Boyer (2001), em textos cuneiformes, escritos pelos babilônicos há quase quatro mil anos, encontramos, por exemplo, a questão de achar dois números conhecendo-se sua soma e seu produto. Em termos geométricos, este problema pede que se determinem os lados de um retângulo, conhecendo o perímetro e a área.

Representando os dois números que se deseja descobrir por x e y, podemos escrever este problema por meio do seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = S - x \\ xy = P \end{cases}$$

Substituindo I em II, temos:

$$x(S - x) = P \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

Logo, os números procurados são as raízes desta equação do 2º grau.

De acordo com Lima (2001), encontrar as raízes de uma equação quadrática é um conhecimento milenar. No entanto, é importante chamar a atenção para o fato de que até o fim do século XVI não se usava fórmula para encontrar os valores das raízes, isso porque não se representavam coeficientes de uma equação por letras. A maneira de expressar equações totalmente em símbolos, começou a ser feito pelo matemático francês François Viète (1540-1603). Até então, usava-se um enunciado que ensinava como proceder, em exemplos com coeficientes numéricos.

É importante destacar que a maneira de encontrar a solução de um problema do segundo grau (raízes de uma equação do 2º grau), desenvolvida ao longo da história, acompanhou as quatro etapas que correspondem à evolução do pensamento algébrico:

- *Sistema de numeração* – Considerava mais as grandezas do que os números, inclusive na manipulação das operações, através de coleções ou de métodos geométricos.
- *Álgebra Retórica* – Não se usava símbolos nem abreviações; as palavras eram empregadas com sentido simbólico.
- *Álgebra Sincopada* – Fazia uso de formas mais abreviadas e concisas para expressar as palavras.
- *Álgebra Simbólica* – As ideias algébricas passaram a ser expressas por meio de símbolos, sem a utilização de palavras.

Observando o quadro a seguir, tem-se uma correspondência entre as etapas e os períodos históricos até o desenvolvimento da fórmula de Bhaskara.

Sistema de Numeração	Babilônios - Resolução de problemas do 2º grau por métodos geométricos (completando o quadrado).
Álgebra Retórica	Babilônia (2000 a.C) - Todos os cálculos eram expressos na forma textos registrados em argila.
	Gregos pré-diofantinos: Euclides em Alexandria (século IV a.C.) – Resolução através de construções geométricas com régua e compasso. Inclusive os gregos só consideravam válidos os cálculos que tinha uma interpretação geométrica.
Álgebra Sincopada	Árabes: Al-Khwarizmi (século IX d.C.) – Resolução por meio de palavras (x^2: quadrado, x: raízes, coeficientes: números) e completando quadrado (usando geometria).
	Hindus: Bhaskara (século XII d.C.) – Juntamente com outros matemáticos hindus formulavam regras para encontrar as soluções das equações.
Álgebra Simbólica	Europa – Renascimento: • François Viète (1540-1603) – Elaboração de símbolos. • René Descartes (1596-1650) – Introduziu o x, além do y e z para representar as incógnitas.

Quadro 01 - As quatro etapas da evolução do pensamento algébrico.

Trabalhando essas propriedades, matemáticos de várias regiões do Velho Mundo, quase que simultaneamente, acabaram deduzindo a fórmula que conhecemos hoje.

Se $ax^2 + bx + c = 0$ com $a \neq 0$, então, demonstra-se que $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (Fórmula de Bhaskara).

Compete observar que durante o desenvolvimento dos processos para resolução dos problemas do 2º grau, percebe-se a forte presença da geometria na procura por essas soluções.

Isso pode ser notado no método dos gregos (séc. IV a.C.), segundo está descrito a seguir:

> Os velhos problemas em que, dada a soma e o produto de dois lados de um retângulo se pediam as dimensões, tinham de ser tratados de modo diferente dos algorítmos numéricos dos babilônios. Uma "álgebra geométrica" tomara o lugar da antiga "álgebra aritmética", [...] Dessa forma os gregos construíram a solução de equações quadráticas pelo processo conhecido como "a aplicação de áreas", uma parte da álgebra geométrica completamente estudada em *Os elementos* de Euclides (BOYER, 2001, p. 53, 54).

O livro II de *Os elementos*, segundo Boyer (2001), apresentava uma álgebra geométrica que, para os gregos dos tempos de Euclides, teve a mesma finalidade que a álgebra simbólica atualmente.

> A afirmação de Euclides (Proposição 4, de Os elementos), "Se uma reta é cortada ao acaso, o quadrado sobre o todo é igual aos quadrados sobre os segmentos e duas vezes o retângulo contido pelos segmentos" é uma maneira prolixa de dizer que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, mas seu apelo visual para um escolar de Alexandria deve ter sido muito mais vívido do que seu equivalente algébrico pode ser (p.75).

Vale ressaltar, que nos dias de Euclides as grandezas eram representadas como segmentos de reta, satisfazendo aos axiomas e teoremas. Atualmente, as grandezas são representadas por letras, correspondendo a números, que são operadas por meio de regras algorítmicas da álgebra. Isso nos leva a entender que possivelmente a álgebra moderna tenha facilitado grandemente a manipulação de relações entre grandezas; contudo, a álgebra geométrica grega[10], mesmo não tendo sido um instrumento ideal, constituiu todavia um meio bastante eficaz.

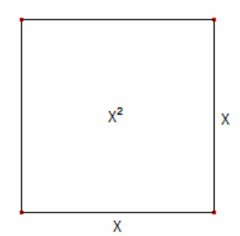
No caso dos árabes (séc. VIII e IX d. C.) Boyer (2001), referindo-se aos procedimentos para resolverem equações quadráticas descritos nos capítulos IV, V e VI da tradução latina da *Álgebra* de al-Khowarizmi (783-850), destaca:

[10] Ressalte-se que naquela época, era a única forma de resolver os problemas.

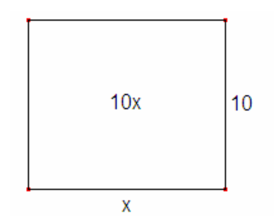
> "[...] são mais interessantes pois abrangem sucessivamente os três casos clássicos de equações quadráticas [...]. As soluções são dadas por regras "culinárias" para "completar quadrado" aplicadas a exemplos específicos. O capítulo IV, por exemplo, contém as três ilustrações $x^2 + 10x = 39$, $2x^2 + 10x = 48$ e $\frac{1}{2}x^2 + 5x = 28$" (p. 157).

Neste caso, al-Khowarizmi além de resolver estas equações quadráticas, procurou verificar através da álgebra geométrica de Euclides, por exemplo, se 3 era de fato solução para $x^2 + 10x = 39$. O quadro a seguir, apresenta o procedimento para se obter esta verificação, segundo Guelli (2002, p.31 e 32):

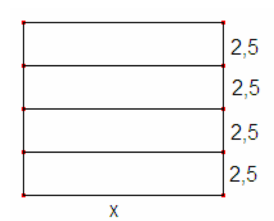
1º) Esboçou um quadrado cuja área representava o termo atual x^2.



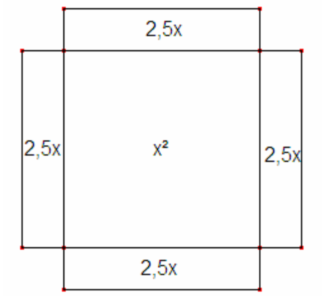
2º) O termo 10x era interpretado como a área de um retângulo de lados 10 e x.



3º) O retângulo foi dividido em quatro retângulos com a mesma área.

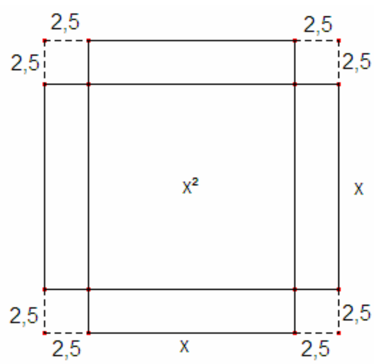


4º) Aplicou cada um dos novos retângulos sobre os lados do quadrado de área x^2.



Assim a área da região plana delimitada pela figura pode ser representada por: $x^2 + 4 \cdot 2{,}5x \Rightarrow x^2 + 10x$. Mas, se a área é igual a 39, então, $x^2 + 10x = 39$.

5º) Desse modo, "Completou o quadrado" com quadrados de lado 2,5.



Neste caso, a área desse quadrado (completado) será igual a $39 + 4 \cdot (2{,}5 \cdot 2{,}5) \Rightarrow 39 + 25 \Rightarrow 64$.

6º) Se o quadrado anterior possui área igual a 64, então, seu lado será igual a 8. Desse modo, $2{,}5 + x + 2{,}5 = 8 \Rightarrow x = 3$.

Quadro 02 - Resolução da equação quadrática pelo processo: completando o quadrado.

Isso nos mostra que apesar de possuírem origens independentes com o passar do tempo, foi percebida a existência de relações; primeiro entre a aritmética e a geometria, depois entre a álgebra e a geometria.

Foi justamente o surgimento da álgebra simbólica (séc. XVII) que possibilitou representar expressões algébricas geometricamente. As equações começam a se destacar nas pesquisas teóricas, através dos trabalhos de Pierre Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650). Esses dois cientistas aplicaram a nova álgebra à geometria e apresentaram, independentemente um do outro, a geometria analítica, que consiste no estudo da geometria por meio de equações, abrindo uma nova era em matemática.

Segundo Garbi (2007), Fermat tinha comunicado através de uma carta a Gilles Persone de Roberval (1602-1675), que havia desenvolvido uma técnica de associar equações a linhas (retas) geométricas. Embora fosse realmente revolucionária, tais ideias só foram divulgadas no livro *"Ad Locos Planos et Solidos Isagogue"* (Introdução aos lugares geométricos retilíneos e cônicos [isto é, do 2º grau]), publicado após sua morte. Todavia, Descartes já havia publicado o célebre *Discours de la méthode pour bien conduire la raison et chercher la vérité dans les sciences* (Discurso sobre o método para raciocinar bem e procurar a verdade nas ciências) de 1637, no qual escrevera um apêndice intitulado *La Géométrie,* considerado a pedra fundamental da geometria analítica.

Em *La Géométrie*, Descartes mostrou que a álgebra poderia ser empregada no estudo da geometria, ao contrário do que ocorrera antes, quando as figuras e as construções geométricas eram utilizadas para resolver problemas de aritmética e de álgebra. Segundo Boyer (2001), no livro I, estão descritas instruções para resolver equações quadráticas, mostrando como as operações algébricas são interpretadas geometricamente.

Referindo-se à evolução da relação forma geométrica e formas algébricas e à relevância das contribuições de Descartes, Bellemain (2004) escreve:

> Ele (Descartes) introduz o simbolismo algébrico numa forma próxima da forma que conhecemos hoje, e sobretudo introduz um novo ponto de vista sobre os objetos geométricos: eles não são associados às grandezas, mas a equações; as formas geométricas correspondem a formas algébricas: cônicas, cúbicas, etc. [...] Descartes esforçou-se para ligar geometria e álgebra através de correspondências entre métodos geométricos e algébricos (p. 04).

A unificação entre os campos (métodos) algébricos e geométricos, segundo Caraça, tem sua importância destacada no processo histórico do desenvolvimento do conhecimento matemático, como se pode ler a seguir:

> [...] o fato de se obter assim essa unificação dos dois campos – geométrico e analítico – que, durante perto de vinte séculos, se tinham considerado em compartimentos estanques. Nesta unificação, realizada de três séculos para cá, reside um dos fatos mais dramáticos, mais importantes e mais profundos da história do conhecimento (CARAÇA, 1951, p. 139 apud LOPES, 2003, p. 17).

A articulação entre a álgebra e a geometria tem sua relevância refletida nos diversos trabalhos científicos publicados desde então, bem como nas diversas aplicações nas demais áreas do conhecimento, como na física, nas engenharias e na computação, dentre outras. Ressalte-se a relevância do fato, visto que foram mais de dois mil anos para que a articulação entre os dois campos se efetivasse.

3.1.2. Três formas algébricas da equação quadrática, articuladas a uma forma geométrica

Conforme já mencionamos, a unificação da geometria com a álgebra foi possível mediante estudos realizados no século XVII por dois franceses, Pierre de Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650) que, independente e quase simultaneamente, criaram o que hoje é denominado de geometria analítica, a qual consiste no estudo da geometria por meio de equações. Essencialmente, a geometria analítica traduz pontos, retas, cônicas e outras construções geométricas em expressões algébricas, as quais, quando analisadas, podem revelar propriedades geométricas das figuras representadas. Segundo o que é discutido nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM):

> A geometria analítica tem sua origem em uma idéia muito simples, introduzida por Descartes no século XVII, mas extremamente original: a criação de um sistema de coordenadas que identifica um ponto P do plano como um par de números reais (x, y). Partindo disso, podemos caracterizá-la como: a) o estudo das propriedades geométricas de uma figura com base em uma equação (neste caso, são as figuras geométricas que estão sob o olhar da álgebra); b) o estudo dos pares ordenados de números (x, y) que são soluções de uma equação, por meio das propriedades de uma figura geométrica (neste caso, é a álgebra que está sob o olhar da geometria) (BRASIL, 2006, p. 76-77).

Desse modo, as figuras geométricas passaram a ser representadas no plano cartesiano. Trata-se de um sistema de eixos ordenados e perpendiculares, em que cada ponto do plano é representado por um único par ordenado (x; y), sendo x e y números reais.

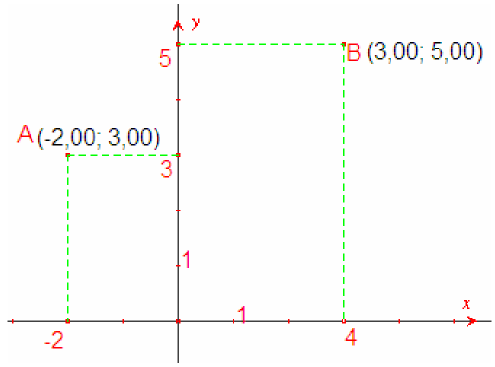


Figura 01 - Representação no plano cartesiano de dois pontos, A e B, por dois pares ordenados (-2; 3) e (3; 5).

Assim, tornou-se possível também representar um conjunto de pares ordenados (x; y) contidos numa reta, ou então, numa curva esboçada no plano cartesiano, por meio de equações que satisfazem uma correspondência entre x e y. Por exemplo, se todo ponto P de coordenadas (x; y) é tal que x e y estão relacionados por uma expressão algébrica, e satisfazendo uma reta ou uma curva, então, podemos estudar suas propriedades a partir da análise da equação.

Observemos a curva da figura 02, que possui como uma de suas representações algébricas a equação $y = 2x^2 - 5x + 3$.

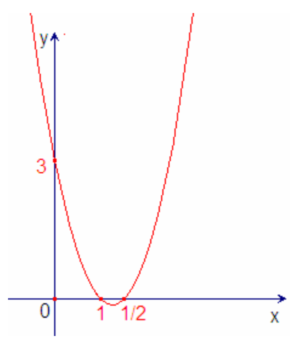


Figura 02 - Gráfico da equação $y = 2x^2 - 5x + 3$.

Podemos destacar algumas de suas propriedades e resolver alguns problemas, analisando apenas suas formas algébricas, tendo em vista que, a partir de $y = 2x^2 - 5x + 3$ podemos encontrar outras representações algébricas que nos fornecerão outros dados explicitamente, além da interseção com o eixo das ordenadas (neste caso é o termo independente 3), explicitado na forma acima, tais como suas raízes e as coordenadas do vértice . As propriedades destacadas nas formas algébricas, as relações entre si e as conexões com sua forma geométrica serão discutidas a seguir.

Analisando a forma algébrica desenvolvida da equação quadrática $y = ax^2 + bx + c$ [11], percebemos que podemos escrevê-la de outras duas maneiras, como apresentado a seguir:

- *Forma canônica*: Colocando o coeficiente a em evidência e, em seguida, completando o quadrado, temos: $y = ax^2 + bx + c$ $\Rightarrow y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}\right]$. Podendo expressá-la também como $y = a(x - m)^2 + k$, sendo $m = -\frac{b}{2a}$ e $k = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$;

- *Forma fatorada*: Se x' e x'' são as raízes reais e distintas da equação representada por $y = ax^2 + bx + c$, colocando a em evidência e substituindo a soma e o produto de x' e x'', obtemos $y = a(x - x')(x - x'')$.

O gráfico de uma equação quadrática, dada por $y = ax^2 + bx + c$, $x \in R$, é o subconjunto $G \subset R^2$ formado pelos pontos $(x; ax^2 + bx + c)$, cuja abscissa é um número real arbitrário x e a ordenada é o valor que y assume para a coordenada x. Demonstra-se que G é uma parábola, cuja definição geométrica é apresentada a seguir:

Consideremos, no plano, uma reta d e um ponto F fora dela. A parábola de foco F e diretriz d é o conjunto dos pontos do plano que são eqüidistantes do ponto F e da reta d.

[11] Neste trabalho chamaremos de forma algébrica desenvolvida da função quadrática.

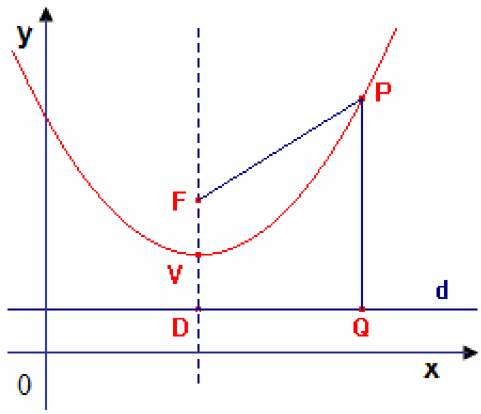


Figura 03 - Parábola.

Neste caso, a parábola representará o gráfico de uma equação quadrática quando sua diretriz for uma reta paralela ao eixo x.

Vale ressaltar que não é interesse nosso tratar do estudo das cônicas, mas analisar as três formas algébricas da equação quadrática - a desenvolvida, a canônica e a fatorada - observando que todas possuem a mesma representação geométrica no plano cartesiano.

3.1.3. Articulando formas algébricas e a forma geométrica da parábola

Independente da forma algébrica da equação quadrática (desenvolvida, canônica ou fatorada) que seja utilizada, sua curva correspondente será a mesma. Porém, em algumas situações, na passagem da forma geométrica para forma algébrica, dependendo das características ou dados evidenciados no gráfico, torna-se mais conveniente fazer uso de uma determinada expressão algébrica do que de outra. Do mesmo modo, algumas formas algébricas favorecerão mais precisamente a análise de certas propriedades de sua representação gráfica. Sendo assim, parece necessário analisar as três formas algébricas, articulando-as à sua forma geométrica.

3.1.3.1. A parábola definida pela forma desenvolvida $y = ax^2 + bx + c$.

A seguir são apresentadas as implicações dos coeficientes a, b e c da forma algébrica articulados a forma geométrica.

i) Coeficiente a:

Se a>0 a concavidade da parábola é para cima, e se a<0 a concavidade é para baixo.

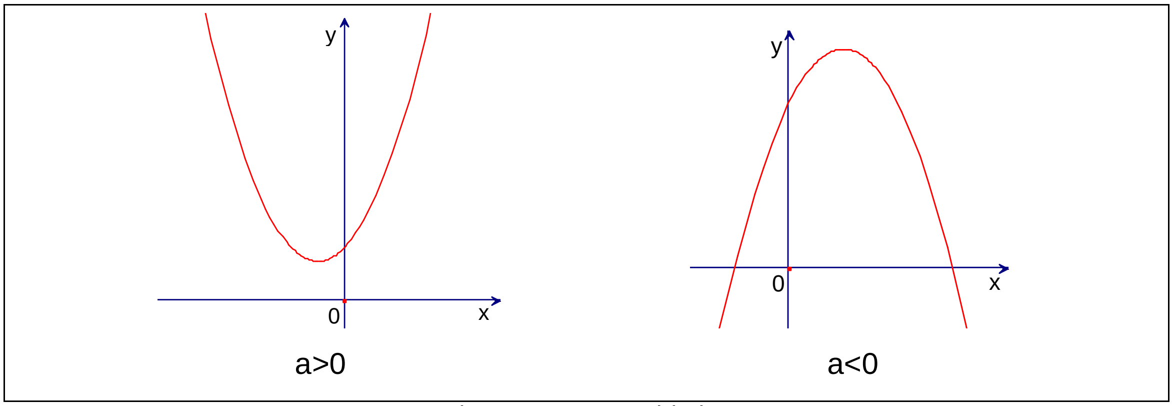


Figura 04 - Concavidades

*ii) C*oeficiente b:

Se b>0 a parábola cruza o eixo das ordenadas no ramo crescente.

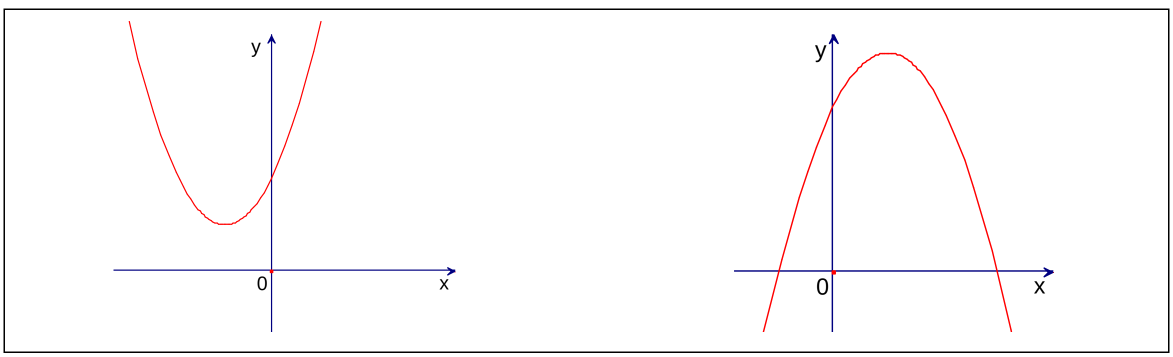


Figura 05 – Ramo crescente.

Se b<0 a parábola cruza o eixo das ordenadas no ramo decrescente.

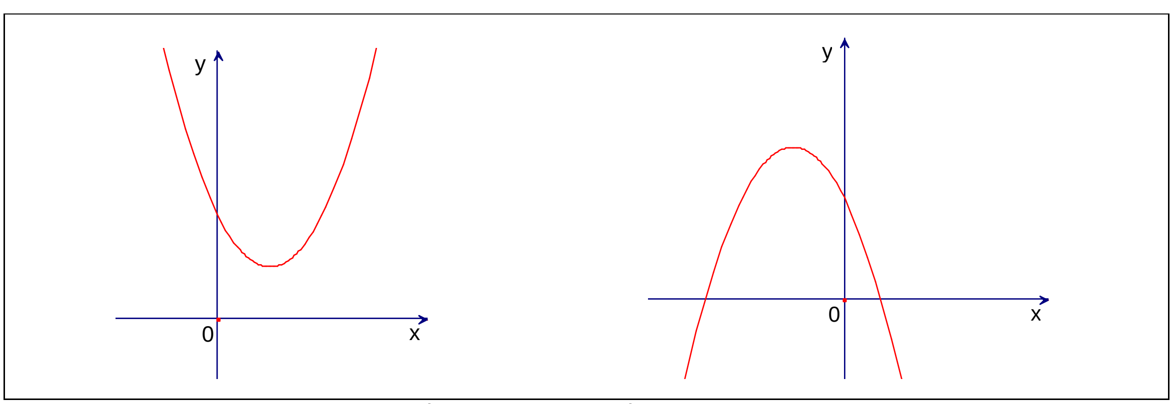


Figura 06 – Ramo decrescente.

iii) Coeficiente c:

Neste caso o coeficiente c indica onde a parábola intercepta o eixo das ordenadas.

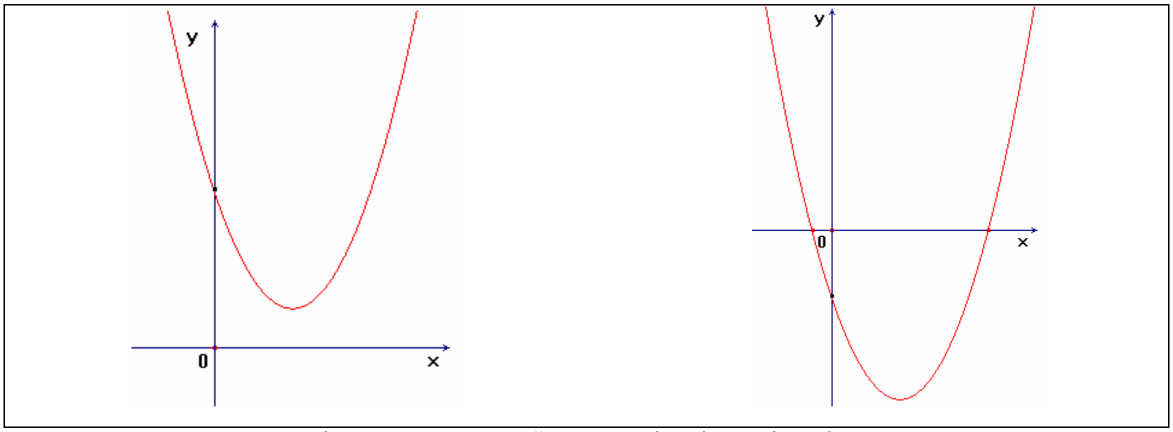


Figura 07 – Interseção com o eixo das ordenadas.

3.1.3.2. A parábola definida pela forma canônica $y = a(x - m)^2 + k$.

i) Para m=0, temos $y = ax^2 + k$.

Desse modo, sendo a>0, a equação quadrática terá valor mínimo, e será expresso por $y = k$ para x=0, ou ponto mínimo, de coordenadas (0, k), que corresponde ao vértice da parábola. Se a<0, então, $y = k$ para x=0, será o valor máximo da equação quadrática e o ponto de coordenadas (0, k), será o vértice ou ponto máximo da parábola.

Além de representar o valor máximo ou mínimo para equação quadrática, k corresponde ao número de unidades, em valores absolutos, acima (k>0) ou abaixo (k<0) em relação ao gráfico da equação quadrática representada por $y = ax^2$, uma vez que são congruentes.

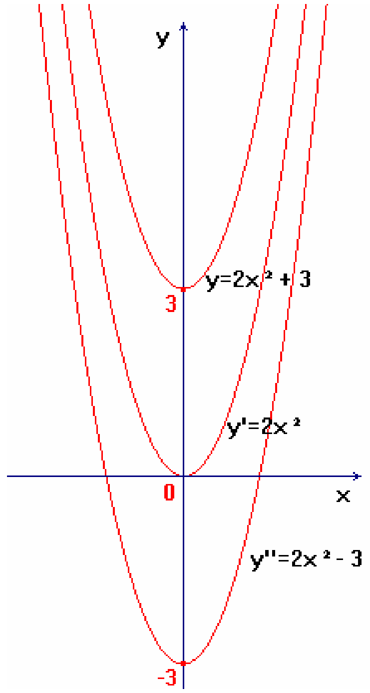


Figura 08 - Gráficos das equações quadráticas definidas pelas formas algébricas y=2x²+3, y'=2x² e y''=2x²-3, com a>0, eixo de simetria das parábolas x=0, y está 3 unidades acima de y' e y'' 3 unidades abaixo, o ponto mínimo de y é (0, 3), y' é (0, 0) e de y'' (0, -3).

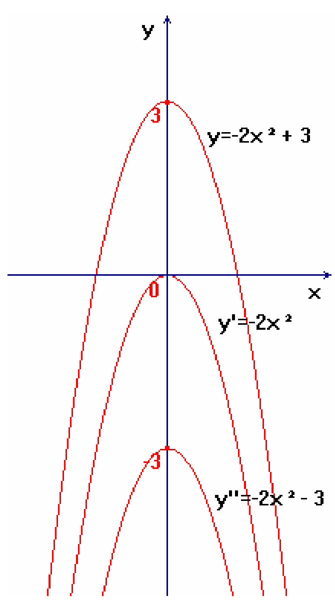


Figura 09 - Gráficos das equações quadráticas definidas pelas formas algébricas y=-2x²+3, y'=-2x² e y''=-2x²-3, neste caso a < 0, o eixo de simetria das parábolas é x=0 e o ponto máximo de y é (0, 3), de y' (0, 0) e de y''(0, -3).

ii) Se k=0, então $y = a(x - m)^2$.

Neste caso, o gráfico de $y = a(x - m)^2$ será transladado m unidades, em valores absolutos, à direita (m>0) ou à esquerda (m<0) em relação ao gráfico da equação representada por $y = ax^2$, uma vez que são congruentes.

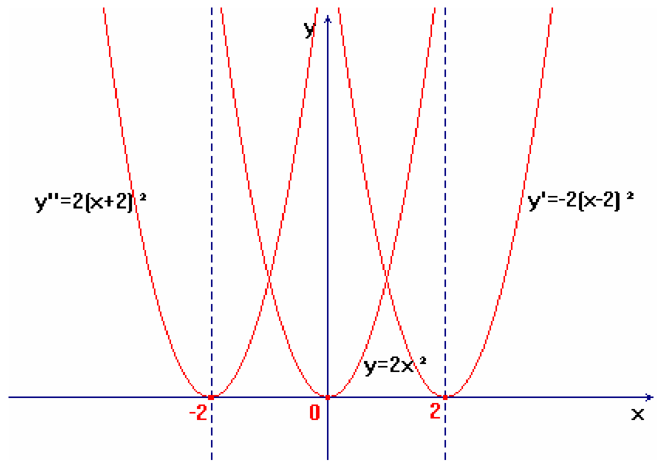


Figura 10 - O gráfico de y' está deslocado 2 unidades à direita do gráfico de y, e o y'' 2 unidades à esquerda de y.

Ainda sobre o coeficiente m, vale salientar que a reta x=m é o eixo de simetria da parábola e os valores mínimos ou máximos também podem ser determinados a partir de m: se a>0, a concavidade da parábola é para cima e ela terá valor mínimo igual a m, ou vértice de coordenadas (m, 0); se a <0, a concavidade é para baixo e o valor será máximo também igual a m, e as coordenadas do vértice da parábola (m, 0).

iii) Sendo m≠0 e k≠0, tem-se $y = a(x - m)^2 + k$.

Nestas condições valem as propriedades dos itens i) e ii).

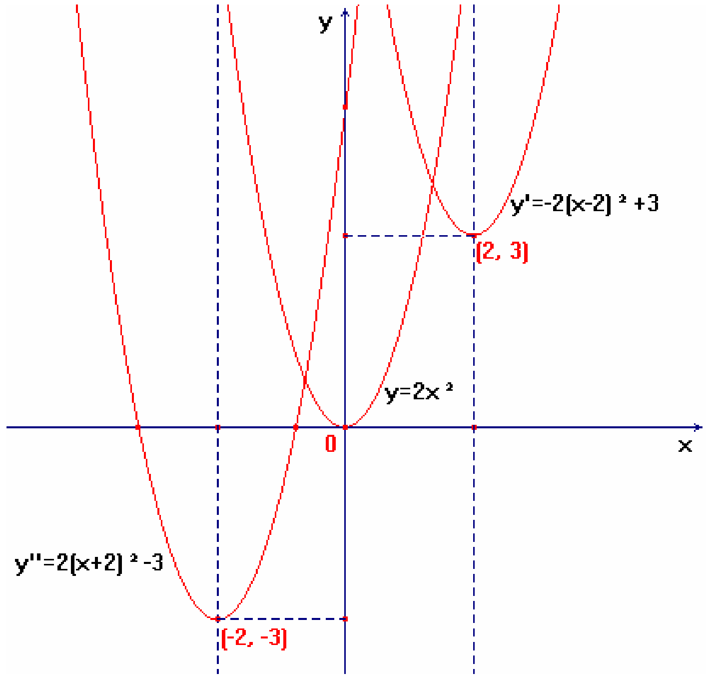


Figura 11 - O gráfico da equação quadrática representada pela forma canônica y'=2(x-2)²+3 está 2 unidades a direita e 3 acima do gráfico de y=2x², já o de equação y''=2(x-2)²-3 está 2 unidades a esquerda e 3 abaixo de y=2x².

3.1.3.3. A parábola definida pela forma fatorada $y = a(x - x')(x - x'')$.

Neste caso, x' e x'' determinará a intersecção da parábola com o eixo das abscissas.

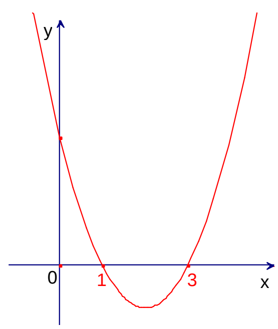


Figura 12 - Gráfico da equação quadrática representada por $y = x^2 - 4x + 3$, ou na sua forma fatorada $y = (x - 1)(x - 3)$.

Desse modo, a explicitação das raízes da equação quadrática se dará na sua forma fatorada $y = a(x - x')(x - x'')$ por *x'* e *x''*, correspondendo às coordenadas x dos pontos de interseção com o eixo das abscissas na representação gráfica.

3.2. TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Inicialmente, gostaríamos de destacar que a teoria dos registros de representações semióticas[12] de Raymond Duval, se esforça em entender o funcionamento cognitivo dos estudantes em situações de ensino, possibilitando desse modo compreender as dificuldades e os problemas da aprendizagem em matemática. Sendo assim, bastante empregada em estudos que buscam entender a complexidade da aprendizagem matemática, bem como a organização de situações de aprendizagem.

Em nossa pesquisa, pretendemos considerá-la para compreender as dificuldades apresentadas por alunos da última série do ensino médio em articular representações algébricas e representação geométrica, no caso da equação quadrática.

O centro de muitas pesquisas em educação matemática tem estado em tentar compreender qual a natureza e onde se encontram as dificuldades, muitas vezes insuperáveis, que inúmeros alunos têm na compreensão de conceitos matemáticos. Ainda mais se considerarmos as recentes exigências de uma formação matemática capaz de preparar os estudantes para o enfrentamento de um mundo cada vez mais informatizado e tecnológico. Segundo Duval (2005), para responder a esses questionamentos não podemos nos restringir unicamente ao campo matemático ou à sua história. De acordo com este autor, se faz necessária uma abordagem cognitiva, de modo que o ensino de matemática venha contribuir para o desenvolvimento global de suas capacidades de raciocínio, de análise e de visualização.

Ao analisar em que consiste a compreensão matemática e as razões das dificuldades de compreensão de muitos estudantes, Duval (2005) destaca que os conceitos matemáticos e suas complexidades epistemológicas, muitas vezes evocados, não são suficientes para caracterizar a originalidade e a especificidade do funcionamento do pensamento em matemática. Para ele, tal originalidade reside em

[12] Segundo Santaella (1983, p. 7 e 13), o nome semiótica vem da raiz grega *semeion*, que quer dizer *signo*. A Semiótica, portanto, é a ciência dos signos, é a ciência que tem por objeto de investigação todas as linguagens possíveis, ou seja, que tem por objetivo o exame dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno de produção de significação e de sentido.

procurar descrever o funcionamento cognitivo que possibilite ao aluno compreender, efetuar e controlar, ele próprio, a diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos em situação de ensino.

Além disso, ele destaca que do ponto de vista cognitivo a atividade requerida pela matemática se difere daquelas requeridas em outras áreas do conhecimento, e apresenta duas características que evidenciam tal diferença:

- *A importância das representações semióticas* - Em princípio, é necessário considerar fundamental as *representações semióticas*[13], uma vez que o desenvolvimento dessas representações constituiu condição essencial para a evolução do pensamento matemático. Para isso, duas razões são apresentadas para destacar a importância dessas representações. Em primeiro lugar, deve-se notar que as possibilidades de tratamento matemático dependem do sistema de representação utilizado. Por exemplo, se considerarmos as operações de cálculos envolvendo o sistema de numeração decimal de posição e o sistema romano de numeração, tem-se que, apesar do primeiro oferecer mais possibilidades, a aprendizagem desse sistema pelos alunos não é nada simples, como destaca Duval (2005). Em seguida, este autor destaca que os objetos matemáticos não são diretamente perceptíveis ou observáveis com auxílio de um instrumento.

- *A variedade de representações semióticas* - Além dos sistemas de numeração, existe uma grande variedade de representações semióticas utilizadas em matemática, tais como: as figuras geométricas, as escritas algébricas e formais, as representações gráficas e a língua natural. Esses diferentes tipos de representações semióticas utilizados em matemática são chamados de “registros” de representação, que podem ser caracterizados em quatro tipos, como apresentados no quadro abaixo:

[13] De acordo com Karrer (2006, p.16), as representações semióticas - no sentido de Duval - provem de sistemas particulares de signos, como, por exemplo, a língua, a escrita algébrica e os gráficos cartesianos, acompanhados de operações cognitivas de mudança de representação de um sistema a outro.

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO-DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: ▪ argumentação a partir de observações, de crenças ...; ▪ dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). ▪ apreensão operatória e não somente perspectiva; ▪ construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algorítmos.	Sistema de escritas: ▪ números (binária, decimal, fracionária, ...); ▪ algébricas; ▪ simbólicas (línguas formais). Cálculo	Gráficos cartesianos ▪ mudanças de sistema de coordenadas; ▪ interpolação, extrapolação.

Quadro 03 - Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático (fazer matemático, atividade matemática). (DUVAL, 2005, P.14)

Como podemos observar no quadro acima, a variedade de representações semióticas presentes na matemática fez surgir a necessidade de se organizar esses diferentes tipos de representações em diferentes tipos de registros, fazendo surgir assim a idéia de representação semiótica.

Duval (2005) destaca que um dos aspectos mais relevantes à originalidade da atividade matemática diz respeito à mobilização simultânea, de no mínimo, dois registros de representação, ou da possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação. Acrescenta ainda que a articulação dos registros constitui uma condição de acesso à compreensão em matemática.

Mas, para que haja mobilização e coordenação desses diferentes tipos de registros de representação, considerando um mesmo objeto matemático, se faz necessário que ocorram transformações de representações semióticas, podendo ser de dois tipos: os *tratamentos* e as *conversões*.

Transformação
de uma representação semiótica em uma
outra representação semiótica

Permanecendo no mesmo sistema: *Tratamento*	Mudando de sistema, mas conservando a referência aos mesmos objetos: *Conversão.*
Quase sempre, é somente este tipo de transformação que chama a atenção porque ele corresponde a procedimentos de justificação. De um ponto de vista “pedagógico”, tenta-se algumas vezes procurar o melhor registro de representação a ser utilizado para que os alunos possam compreender.	Este tipo de transformação enfrenta os fenômenos de não-congruência. Isso se traduz pelo fato *de os alunos não reconhecerem o mesmo objeto através de duas representações diferentes.* A capacidade de converter implica a coordenação de registros mobilizados. Os fatores de não-congruência mudam conforme os tipos de registro entre os quais a conversão é, ou deve ser, efetuada.

Quadro 04 - A distinção decisiva para toda análise do funcionamento cognitivo da compreensão – dois tipos radicalmente diferentes de transformação de representações semióticas (DUVAL, 2005, P.15).

Para Duval (2005) os *tratamentos* consistem em transformações de representações dentro de um mesmo registro, ou seja, ocorre internamente como, por exemplo, os processos de resolução de uma equação. Já as *conversões* implicam em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados, o que pode ser observado na passagem da escrita algébrica de uma equação para sua representação gráfica.

Considerando que em nosso estudo buscamos identificar as dificuldades dos estudantes em *articular os registros algébricos e gráfico* (nos dois sentidos[14]) da equação quadrática, entendemos tratar-se de transformações relacionadas às conversões de registros de representações. Como exemplo, podemos considerar as três formas algébricas - desenvolvida, fatorada e canônica - para a equação

[14] Articular as representações algébricas – três formas: desenvolvida, fatorada e canônica – a sua representação gráfica, considerando tanto a passagem das formas algébricas para a forma geométrica como da forma geométrica para as formas algébricas.

quadrática e sua representação geométrica correspondente no sistema de coordenadas cartesianas. Neste caso, pode-se partir da representação gráfica observando suas variáveis visuais (concavidade, abertura, vértice, interseção com os eixos, etc.) e escrever as equações, ou então, esboçar o gráfico considerando as características significativas das expressões algébricas (os valores e condições dos coeficientes).

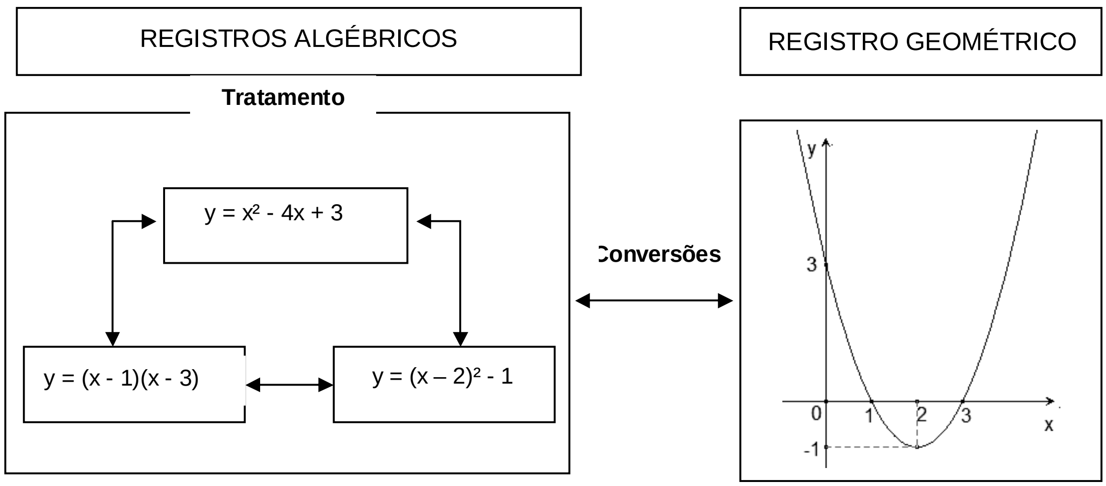
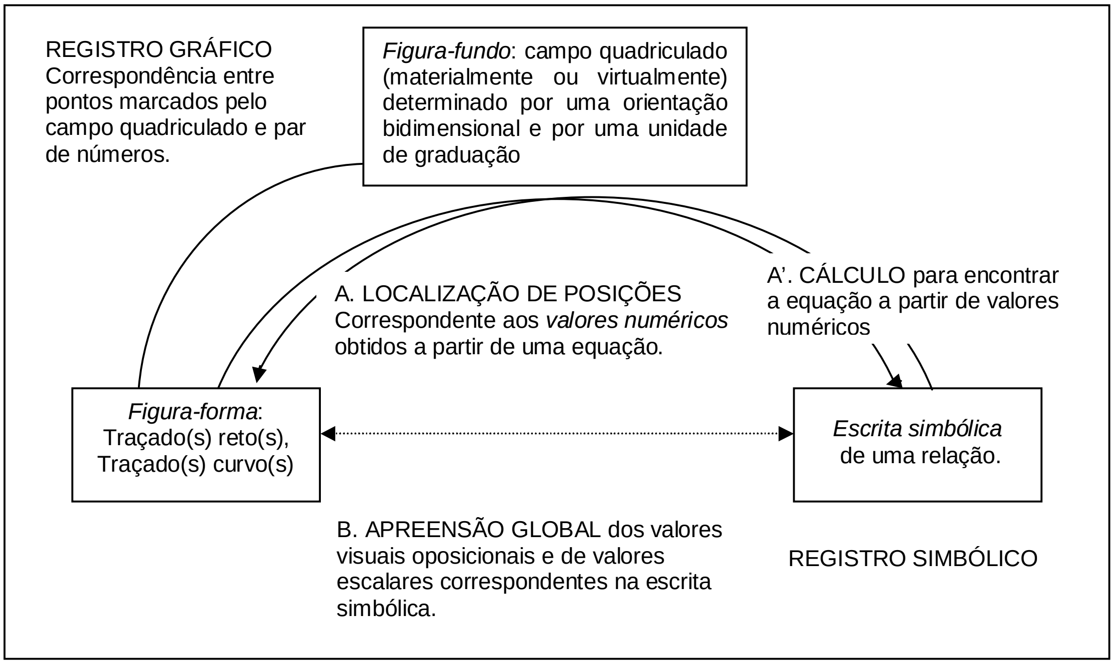


Figura13 - Correspondência entre os registros algébricos e o gráfico.

Duval (2005) chama a atenção para o fato de se considerar simples e local, converter a representação de um objeto de um registro a outro, reduzindo muitas vezes a conversão a uma "codificação". Desse modo, passar de uma equação para sua representação gráfica consistiria simplesmente em aplicar uma regra, onde um ponto está associado a um par de números no plano cartesiano. Neste caso, o autor destaca que "tal visão é superficial e enganadora", uma vez que a regra de codificação permite apenas uma leitura pontual das representações gráficas, em contraponto a uma apreensão global e qualitativa.

> Ora, é essa apreensão global e qualitativa que é necessária para extrapolar, interpolar, ou para utilizar os gráficos para fins de controle, ou de exploração, relacionados aos tratamentos algébricos (p. 17).

A conversão entre gráficos e equações supõe que se leve em conta as variáveis visuais próprias dos gráficos (concavidade, intersecção com os eixos, etc.) e os valores escalares das equações (coeficientes positivos ou negativos, etc.)



Quadro 05 - Esquema de organização semiótica e do funcionamento das representações gráficas (DUVAL, 2005, P.18).

Analisando o quadro anterior, podemos destacar, segundo Duval (2005), que esta organização permite três tipos de tratamentos e dois tipos de conversão com o registro simbólico. Enquanto as ligações A e A' permitem apenas uma leitura pontual dos gráficos, a coordenação B possibilita uma apreensão global qualitativa, isto é, permite ao aluno reconhecer a forma de uma equação analisando as formas e a posições das curvas. Todavia, o autor ressalta que apesar de se tratar de um caso elementar do ponto de vista cognitivo (aquele que envolve dois registros monofuncionais), essa coordenação-articulação entre as formas algébricas e a forma geométrica não é efetuada nem mesmo por alunos no último ano do ensino médio.

A conversão das representações apresenta dois tipos de fenômenos característicos: *as variações de congruência e de não-congruência* e a *heterogeneidade dos dois sentidos de conversão*. Os fenômenos de congruência e de não-congruência podem ser observados ao considerarmos que, a partir de uma representação em determinado sistema semiótico, se produzirá uma outra representação em outro sistema semiótico, distinto daquele que se partiu. Se na comparação da representação do registro de saída (enunciado) com a representação do registro de chegada, transparece que a transformação se aproxima de uma situação de simples codificação, isto é, se a passagem de uma representação para outra se faz de forma espontânea, diz-se que há *congruência* na conversão. Caso contrário, o registro de chegada não explicita o registro de saída; se dirá que ocorre a *não-congruência*.

Se considerarmos, por exemplo, uma das formas da equação quadrática como registro de saída, teremos que ela não transparecerá totalmente no seu registro de chegada - representação geométrica. Neste caso, uma forma algébrica não seria suficiente para estabelecer correspondência com todas as variáveis visuais do gráfico - vértice e interseção com os eixos - pois cada uma explicita algum ou alguns desses pontos, mas não todos; isso implica em não satisfazer as condições para conversões congruentes, sendo deste modo, uma conversão não-congruente. Sendo assim, destacamos em nosso estudo, apenas conversões não-congruentes, visto que estamos considerando a articulação das formas algébricas para uma representação gráfica.

Ainda de acordo com Duval (2005), existem conversões que são congruentes num sentido e não se efetuam quando se invertem os registros de partida e de chegada, ou seja, são congruentes num sentido e não-congruentes em outro. Este fenômeno é denominado de *heterogeneidade dos dois sentidos de conversão.*

> Geralmente, no ensino, um sentido de conversão é privilegiado, pela idéia de que o treinamento efetuado num sentido estaria automaticamente efetuado a conversão no outro sentido. [...] Infelizmente esses (casos de congruência) não são os casos mais freqüentes (p. 20).

Isso ocorre quando uma conversão apresentar congruência num sentido e, ao inverter-se o sentido da conversão, o registro de saída quando comparado ao registro de chegada apresenta não-congruência.

Ainda com relação à atividade de conversão, Duval (2005) destaca que um objeto matemático não deve ser confundido com a representação que se faz dele, e o acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por representações semióticas. Essa aparente contradição o leva a apresentar o seguinte questionamento, denominado paradoxo da compreensão matemática: *como podemos não confundir um objeto e sua representação se não temos acesso a esse objeto a não ser por meio de sua representação?* Em seguida, ele examina a questão ressaltando a importância do registro em relação ao objeto[15], pois *o conteúdo de uma representação depende mais do registro de representação do que do objeto representado;* além disso, acrescenta o autor, a compreensão em matemática implica a capacidade de mudar de registro.

> Vê-se, então, porque a compreensão matemática está intimamente ligada ao fato de dispor de ao menos dois registros de representação diferentes. Esta é a única possibilidade de que se dispõe para não confundir o conteúdo de uma representação com o objeto representado [...].
> É a articulação dos registros que constitui uma condição de acesso à compreensão em matemática, e não o inverso, qual seja, o "enclausuramento" de cada registro (p. 22).

É importante ressaltar que a compreensão em matemática implica a capacidade de passar de um registro de representação a outro - é na passagem de um registro para outro que se pode observar a importância da forma de representação - pois mudar de registro não consiste apenas em mudar o modo de tratamento, mais também em explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto. Duval (2005) chama essa articulação de coordenação B, apreensão global qualitativa, apresentada no quadro 05.

A mudança de registros de representações é abordada num artigo de Duval (1988) intitulado: "Gráficos e equações: a articulação entre dois registros", no qual são apresentadas análises acerca das variáveis visuais (posições e interseção com os eixos cartesianos) de gráficos da função afim y=ax+b e das unidades simbólicas significativas da equação (coeficientes positivos ou negativos, maior menor ou igual a 1, etc.), bem como, as dificuldades dos alunos do ensino médio em relação à passagem do registro gráfico para o algébrico e do algébrico para o gráfico.

---

[15] Segundo França (2007, p. 19), comentando sobre a distinção que se deve fazer entre representação e objeto, "Uma representação é um objeto matemático quando o sujeito reconhecer na representação seu conteúdo matemático".

O autor destaca que a razão para profundas dificuldades em ler e interpretar as representações gráficas, parece está associada à falta de conhecimento das regras de correspondência semiótica, entre os registros gráficos e sua escrita algébrica. Por exemplo, a passagem de uma equação à sua representação geométrica - muito abordada no ensino - ocorre ponto a ponto, no entanto na passagem da representação gráfica para a expressão algébrica, esta abordagem tem constituído um obstáculo.

Em oposição a este procedimento, Duval (1988) sugere uma descrição sistemática das variáveis visuais levando em consideração o procedimento de interpretação global das propriedades figurais, em que o conjunto traçado/eixo forma uma figura que representa um objeto descrito por uma expressão algébrica, possibilitando identificar as modificações realizadas na figura e na expressão. Isso implica sair de um tratamento focado na associação “um ponto – um par de números” para a associação “variável visual da representação – unidade significativa da escrita algébrica”. A seguir apresentamos a tabela com as unidades simbólicas correspondendo às variáveis visuais da função polinomial do 1º grau (afim) y=ax+b:

Variáveis visuais	**Valores**	**Unidades simbólicas correspondentes**	
Sentido da inclinação:	traço ascendente	coeficiente > 0	falta do símbolo –
	traço descendente	coeficiente < 0	presença do símbolo –
Ângulos com os eixos:	divisão simétrica	coeficiente = 1	pelo coeficiente escrito
	ângulo menor	coeficiente < 1	
	ângulo maior	coeficiente > 1	
Posição sobre o eixo y:	passa acima	acrescentamos uma constante	signo +
	passa abaixo	subtraímos uma constante	signo –
	passa à origem	pela correção aditiva	

Quadro 06 - Análise das três variáveis particulares em casos onde o gráfico é um traçado limitado ao caso de retas não paralelas a um dos eixos (Duval 1988, p. 240).

O procedimento de esboço de gráficos representado acima, consiste em relacionar as variáveis visuais às correspondentes unidades simbólicas, sendo o sentido da inclinação, o ângulo com os eixos e a posição sobre os eixos, as variáveis visuais e o valor do coeficiente angular *a* (nas duas primeiras) e o valor do coeficiente linear *b* (na terceira variável visual) as unidades simbólicas correspondentes.

Gostaríamos de ressaltar que Maia (2007) estudou a conversão entre a representação algébrica e geométrica da função quadrática, tomando por base os estudos de Duval (1988). Muito embora nossa pesquisa não trate das funções, mas da articulação entre formas algébricas e forma geométrica, esses trabalhos são relevantes para nosso estudo, por tratarem da passagem entre expressões algébricas e representações geométricas numa perspectiva dos registros de representações semióticas, considerando a interpretação global das propriedades figurais. Vale ressaltar que na pesquisa de Maia (2007) existe um outro aspecto comum; a articulação se dá com o auxílio de uma ferramenta computacional, para proporcionar o tratamento dinâmico exigido nas conversões.

Tomando como referência esse contexto, foi possível elaborar um quadro para cada caso, diferenciando as variáveis visuais e unidades simbólicas correspondentes, referentes à equação quadrática nas formas desenvolvida $y = ax^2 + bx + c$, fatorada $y = a(x - x')(x - x'')$ e canônica ($y = a(x - m)^2 + k$, sendo $m = -\dfrac{b}{2a}$ e $k = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$). Ao promover a articulação das três formas algébricas com a forma geométrica e da forma geométrica com as algébricas, buscamos tornar mais explícita a correspondência entre os coeficientes e variáveis visuais, ou seja, enquanto uma equação explicita determinadas variáveis outras não, desse modo, uma complementará a outra.

As discussões aqui apresentadas foram de fundamental importância no desenvolvimento do nosso aplicativo. Os quadros mencionados no parágrafo anterior, descrevendo as variáveis visuais e unidades simbólicas correspondentes das formas da equação quadrática, serão descritos mais adiante, no tópico correspondente ao aplicativo, no capítulo 05.

3.3. CONTRIBUIÇÕES DE UMA FERRAMENTA COMPUTACIONAL

A ciência da computação tem disponibilizado ferramentas e métodos que, quando comparados com outros disponíveis na pesquisa em educação, revelam diferenças importantes tanto do ponto de vista dos objetivos quanto da natureza. Sendo assim, percebe-se a necessidade de pontes que venham conectá-los. Desse modo, algumas teorias devem ser adaptadas e estendidas com a introdução da informática nesse processo, é o caso da transposição didática de Chevallard (1985).

A seguir, destacaremos alguns elementos da transposição didática que nos parecem relevantes, bem como, a integração da informática neste processo.

Tomando por base, a ideia de que qualquer comunicação de um saber precisa ser transformado em função da comunidade alvo dessa comunicação; a transposição didática, trata de estudar esse processo de adaptação, no caso do ensino e, portanto, investiga a transformação de saberes de referência para produzir saberes a ensinar, ou seja, refere-se à adaptação do conhecimento para transformá-lo em “conhecimento para ser ensinado”.

Figura 14 – Transposição didática: transformando o saber de referência no saber a ensinar.

Desse modo, percebemos que os aspectos sociais e a epistemologia do saber assumem papeis relevantes nesse processo. Além disso, essa transposição deve também adaptar-se as exigências próprias das condições materiais de ensino e hipóteses de aprendizagem.

No aspecto social, o processo de transposição integra as exigências da sociedade[16] sobre a escola e particularmente sobre o seu papel de formação e

[16] A sociedade é representada pela noosfera (CHEVALLARD, 1985), constituída das pessoas que pensam sobre a educação: cientistas, educadores, psicólogos, sociólogos, etc.

integração dos indivíduos nas estruturas socio-econômicas. Isso ocorre, por exemplo, na determinação dos conteúdos a ensinar - objetos de saber, saber-fazer, técnicas, ferramentas, dentre outros, tendo em vista a necessidade de preparar indivíduos para o enfrentamento de um mundo profissional e social que os colocam constantemente em situações desafiadoras.

Já a dimensão epistemológica aparece na determinação dos objetos do saber a ensinar. Esses objetos são os conceitos com suas conexões, os sistemas de representação, os meta-conhecimentos, os métodos, etc., que constituem o saber e que devem ser reorganizados para adaptar-se ao nível de ensino. Além disso, outros elementos podem ser incorporados ao processo a partir da reflexão epistemológica sobre o saber, como, os objetivos, as aplicações do saber, neste caso, influenciando a determinação e organização dos conteúdos. É o que percebemos, por exemplo, na reforma da matemática moderna, proporcionando a reorganização dos conteúdos ensinados em torno de uma estrutura exclusivamente hierárquica e lógica, constituindo-se na aplicação de certa visão epistemológica da matemática.

Com a implementação da informática no ensino, as condições do processo de transposição didática mudam, conseqüentemente, suas exigências e preocupações vão ter respostas diferentes, requerendo desse modo, que tais condições sejam adaptadas e estendidas. Essas adaptações e extensões deram origem ao conceito de *Transposição Informática,* introduzido por Balacheff (1993) como um complemento da transposição didática, para caracterizar as modificações do saber a ensinar com sua mediatização através do computador.

Balacheff & Bellemain (2007) definem *transposição informática* como o processo que organiza a especificação e a implementação de um modelo do saber. Uma grande parte desse processo trata das necessidades em acomodar-se às exigências de representações simbólica e computacional.

Figura 15 – Transposição informática: conectando a Ciência da computação a pesquisa em Educação Matemática.

Gostaríamos de destacar que a introdução da informática no estudo destes processos não pode centrar-se apenas na mediação do saber a ensinar, uma vez que a introdução do computador participa da transformação do saber de referência. A transposição informática deve ser considerada não só do ponto de vista da integração das novas tecnologias no ensino, mas também, na perspectiva da sua produção.

Assim, devem ser consideradas algumas questões fundamentais no processo de transposição informática para integrar e aproveitar os métodos e conceitos da ciência da computação. Como por exemplo, a que diz respeito às representações e as manipulações dos objetos de saber pelo computador e a disponibilização desses elementos para o sujeito, bem como, algumas propriedades das representações gráficas no computador e suas conseqüências sobre o processo de transposição.

Segundo Bellemain (2000), o desenvolvimento de softwares educativos é quase sempre restrito a parte de adaptação e mediatização pelo computador do saber a ensinar, visto que, inúmeros softwares utilizam as potencialidades do computador só para dar uma aparência "multimidiática" aos conteúdos. O autor destaca ainda, que essa contribuição do computador para a aprendizagem está longe das reais possibilidades ofertadas, embora, destaque alguns aspectos positivos, como a individualização do ensino, permitindo uma melhor adaptação do ritmo de ensino ao ritmo do aluno, e a acessibilidade aos conteúdos para quem não tem acesso à escola ou a outras formas institucionais de ensino.

Para o autor, além de poder influenciar sobremaneira o processo de determinação do saber a ensinar, as maiores contribuições do computador na educação aparece quando o processo de transposição didática considera a introdução do computador desde o seu início. Desse modo, a transposição informática não se restringe apenas ao complemento da transposição didática, mas, corresponde ao processo de transposição didática integrando explicitamente a dimensão informática desde o princípio.

Ainda mais, através de sua potencialidade ao realizar cálculos, o computador possibilita a exploração e a construção de conhecimentos sobre novos registros de representação do saber e favorece a introdução desses objetos no ensino. Do ponto de vista do suporte material, a ciência da computação multiplica as linguagens e ferramentas, permitindo representar e manipular os mais diversos saberes, através da possibilidade de criar novas representações dos objetos.

Se levarmos em consideração os problemas que exigem a utilização de múltiplas capacidades perceptivas para construir as significações e os símbolos necessários ao cálculo e à resolução do problema, teremos que o homem apresenta um desempenho bem superior ao computador. Bem, é nessa construção de significações e símbolos, que nossas competências podem ser identificadas em termos de reconhecimento de forma, determinação de analogias, interpretação do contexto e modelização entre outras.

Desse modo, destacamos que a criação, por meio do computador, de verdadeiros registros de representação semiótica - no sentido de Duval (1995) e destacada por Balacheff (1999) - tem por objetivo facilitar, através da manipulação dessas representações, a compreensão dos conceitos representados.

Sendo assim, parece-nos que a integração das reflexões sobre o processo de ensino-aprendizagem no desenvolvimento de softwares educativos, poderá proporcionar, não apenas organizações habituais da sala de aula em ambientes computacionais, mas também, novas maneiras de estruturar esse processo.

Considerando o fato de o computador apresentar muitos recursos, que podem assistir o educador nas tarefas didáticas, parece-nos possível conceber com a tecnologia computacional, ambientes que venham contemplar as especificidades dos conteúdos associadas à possibilidade de representação e exploração dos objetos matemáticos, permitindo simplificar situações e focalizar as observações em certos fenômenos, eliminando outros que podem não ser pertinentes

Esses ambientes de que necessitamos podem ser concebidos como simuladores[17]. Em situações de ensino, as simulações[18] com o computador, além de permitirem trazer para a sala de aula experiências, que por várias razões não seriam possíveis nas suas versões concretas, possibilitam multiplicá-las com condições iniciais diferentes, calcular múltiplos dados e simular em alguns minutos fenômenos cuja experimentação exigiria muito mais tempo nas condições reais.

Uma simulação no computador funciona como um sistema de representação dinâmica de um modelo, conduzindo o aluno, através da observação, à construção de conhecimentos a partir da exploração de comportamentos de objetos e fenômenos. Nesse sentido, Bellemain (2000) propõe que:

> Essa nova organização do ensino com a introdução do computador pode apoiar-se sobre uma gestão do tempo diferente, a possibilidade de organizar mais fases individuais e favorecer, de um modo geral, a aproximação entre o tempo de aprendizagem e o tempo de ensino. Na medida que o computador executa algumas tarefas, práticas tais como cálculo, construção de figuras, de gráficos, etc., ele permite a organização de mais atividades conceituais" (p. 03).

Nessa perspectiva, se faz necessário repensar a estrutura de ensino, os tipos de atividades, os conteúdos ensinados, inclusive o papel do professor.

[17] Mesmo considerando que os meios tecnológicos não são unicamente informáticos, visto que existem simuladores tanto concretos como virtuais, entendemos que o computador tem um papel privilegiado na elaboração de simulações, ao fornecer meios de multiplicar as suas possibilidades.

[18] Considerando o significado atribuído por Bellemain, Bellemain & Ferreira (2006) simulação consiste na reprodução, por meios tecnológicos, de propriedades e comportamentos de objetos ou fenômenos concretos.

Salientemos que em nossa pesquisa buscamos identificar e compreender as dificuldades que os alunos apresentam e as implicações da utilização de uma ferramenta computacional, aplicativo ad hoc, na articulação entre dois registros de representações, considerando a passagem das equações para o gráfico. Nesse sentido, supomos que a inserção do computador poderá favorecer a compreensão dessas situações por parte dos estudantes, como por exemplo, enquanto o aplicativo cuida da representação das coordenadas, do cálculo de valores e esboço do gráfico de forma dinâmica, o aluno concentra-se sobre as questões conceituais e de articulação desta forma geométrica com as formas algébricas, ou ao contrário, modificam-se os coeficientes das expressões algébricas e observam-se as variações ocorridas na representação gráfica.

Algumas pesquisas destacaram a importância da utilização de um recurso computacional na articulação dos registros de representação algébricos e gráficos, como destacamos a seguir:

- Souza (1996): Investigou alunos do ensino médio da cidade de Rio Claro (SP), sobre a potencialidade da utilização de calculadora gráfica no ensino de função quadrática. A autora destaca que a visualização e experimentação proporcionadas pela máquina foram fundamentais na compreensão do conceito, possibilitando explorar variações no gráfico com alterações nos coeficientes da expressão algébrica correspondente.

- Silva et all (2002): Em pesquisa realizada com alunos do primeiro ano do curso de cálculo do ensino superior, desenvolveram atividades as quais propunham que através de uma ruptura no Contrato Didático[19], juntamente com constantes renegociações, fosse possível uma mudança de postura dos alunos com relação ao comportamento das funções, envolvendo inclusive suas representações gráficas e algébricas, a partir de suas representações num ambiente computacional. Ao final ressaltaram que a aplicação de tais atividades na dinâmica como foi

[19] Segundo D´Amore (2007) a partir dos anos 70 surgiu no mundo da pesquisa em Didática da Matemática a idéia de contrato didático, lançado por Guy Brousseau (IREM Bordeaux, 1978). Em poucas palavras, o contrato didático é uma negociação entre os parceiros da relação, a despeito de um saber que deve ser ensinado pelo professor e aprendido pelo aluno.

proposta proporcionou a construção dos conceitos necessários para análise do comportamento das funções.

- Santos (2002): O trabalho se deu com alunos do ensino médio de uma escola da rede privada de ensino da cidade de São Paulo (capital), e buscou elaborar atividades que pudessem ser executadas, com o auxílio de um *software tipo jogo chamado Funcplus*, que envolve questões abertas e outras relacionadas à articulação entre gráfico e equação, construído especialmente para esta finalidade; as relações entre as representações gráficas e algébricas da função afim, buscando proporcionar ao aluno uma melhor compreensão da conversão do registro gráfico para o algébrico. Neste caso, também foi utilizada a teoria dos Registros de Representação de Duval (1999) e a Transposição Informática de Balacheff (1991).

Segue algumas considerações sobre os resultados do estudo:

- As experimentações realizadas, segundo o autor, tenderam a comprovar que a aquisição de saberes relacionados aos coeficientes da equação $y = a.x + b$ por meio da articulação dos registros gráficos e algébricos da função afim, se comparados às abordagens tradicionais expositivas, apresentaram resultados significativos quando apoiados na interação aluno/software.
- O registro das interações aluno/máquina, integrado ao programa pelos alunos, possibilitou acesso a dados que permitiram identificar fenômenos dificilmente perceptíveis em ambientes usuais.
- A visualização e experimentação tiveram um importante papel na compreensão de alguns saberes relacionados aos coeficientes da função afim.

- Maia (2007): Elaborou e aplicou uma seqüência didática com alunos da 8ª série (9º ano) do ensino fundamental, com o propósito de fazer com que o gráfico fosse enxergado como um conjunto de variáveis visuais

> diretamente ligadas à escrita algébrica. Para isso utilizou o software Winplot, que favoreceu sobremaneira as modificações no gráfico, a partir de alterações na expressão algébrica.

Como podemos observar, os estudos evidenciaram que o uso de uma ferramenta computacional favoreceu tanto os professores - na observação e análise dos fenômenos ocorridos na pesquisa - quanto os alunos, por exemplo, na percepção de fenômenos através da visualização e experimentação por meio das variações realizadas no gráfico e na equação simultaneamente proporcionada pelo tratamento dinâmico dos objetos matemáticos, favorecendo desse modo a constatação de regularidades e a construção de conceitos.

Assim sendo, decidimos investigar quatro softwares que se propunham a articular equações e gráficos ou que possibilitavam essa função, dentre outras. A seguir, apresentaremos um comentário acerca dos programas e de suas ferramentas, ou seja, o que de fato se realizou em termos de articulação e se atendiam aos nossos questionamentos.

- **Cabri-Géomètre**

O Cabri-Géomètre II - Plus desenvolvido por Franck Bellemain e Jean-Marie Laborde, na Universidade Joseph Fourier em Grenoble – França, é um software (não gratuito) de Geometria Dinâmica[20]. Ele oferece diversos recursos para a edição, exploração de figuras e ferramentas para medição, determinação de equações e coordenadas, cálculo envolvendo os elementos numéricos anteriores, possibilitando assim ser usado na construção e exploração de gráficos, articulado à sua representação algébrica.

Ressalta-se o fato do Cabri permitir uma construção que possibilita manipular uma equação e ter os efeitos sobre as outras equações e o gráfico. No entanto, precisamos realizar várias construções para poder manipular outras equações e o gráfico. Neste caso, não temos a possibilidade de manipular qualquer

---

[20] Segundo Bellemain (2001): "A Geometria Dinâmica permite considerar e conceber uma representação de objetos matemáticos abstratos em várias configurações, podendo modificar suas posições relativas" (p.1314).

coeficiente de qualquer equação ou qualquer ponto de controle do gráfico num mesmo grafico/equações, ou seja, não podemos modificar os dois concomitantemente.

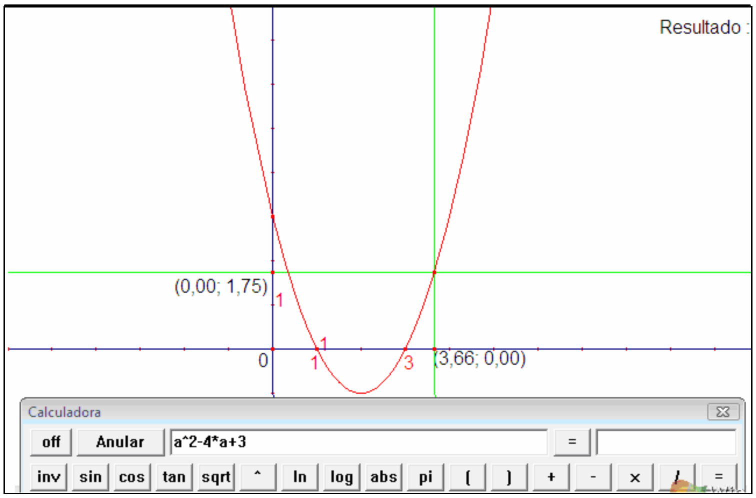


Figura 16 - Interface do Cabri II Plus sendo utilizada para realização da articulação forma algébrica e forma geométrica.

Neste caso, escreve-se a equação na calculadora - acima temos a forma desenvolvida y= x^2 - 4x + 3, onde o *a* representa a variável x - e esboça-se o gráfico correspondente, de modo que qualquer forma algébrica pode ser escrita e seus coeficientes modificados, com implicações apenas em ajustes na forma geométrica.

- **GeoGebra**

O GeoGebra é um software gratuito de matemática dinâmica que oferece recursos de geometria, álgebra e cálculo. Criado por Markus Hohenwarter, possui todas as ferramentas tradicionais de um software de geometria dinâmica: pontos, segmentos, retas e seções cônicas. Por outro lado, equações e coordenadas podem ser inseridas diretamente. Assim, este programa tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, duas representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si: sua representação geométrica e sua representação algébrica, favorecendo a dupla percepção dos objetos; toda expressão na janela algébrica corresponde a um objeto na área de trabalho, e vice-versa.

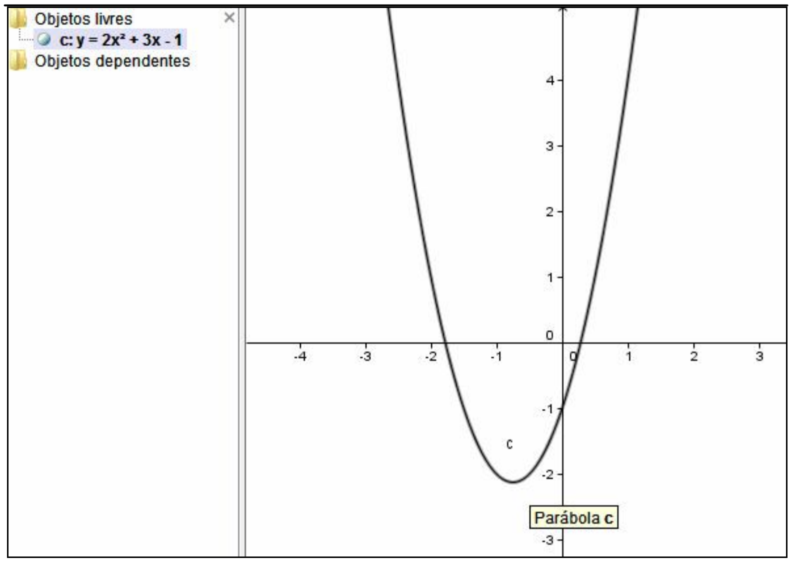


Figura 17 - Interface do GeoGebra apresentando a equação y=2x²+3x-1 e sua representação gráfica correspondente.

Ao manipular a representação gráfica com a equação, isto é, articulando as duas representações, podemos observar os efeitos das manipulações de uma representação na outra. Porém, essas manipulações da representação gráfica são limitadas às translações, tendo como efeito um tratamento por mudança de variável na equação, e não temos como ter duas formas de equação da mesma curva ao mesmo tempo. Assim, o GeoGebra permite a criação de equação dependendo de coeficientes manipuláveis, mas a curva obtida por uma tal equação não é manipulável.

Pelas observações levantadas entendemos que este software não atende às necessidades de nosso estudo relacionados à articulação das variáveis visuais com as unidades simbólicas correspondentes.

- **Winplot**

Desenvolvido por Richard Parris, da Phillips Exeter Academy, este programa de domínio público é utilizado para construir e explorar gráficos de funções obtidos a partir da definição de sua expressão algébrica no plano ou no espaço. As ferramentas disponibilizadas no software possibilitam, entre outras coisas, escrever e editar uma equação para se esboçar o gráfico correspondente, permitindo ainda a explicitação somente do gráfico, só da equação ou dos dois simultaneamente.

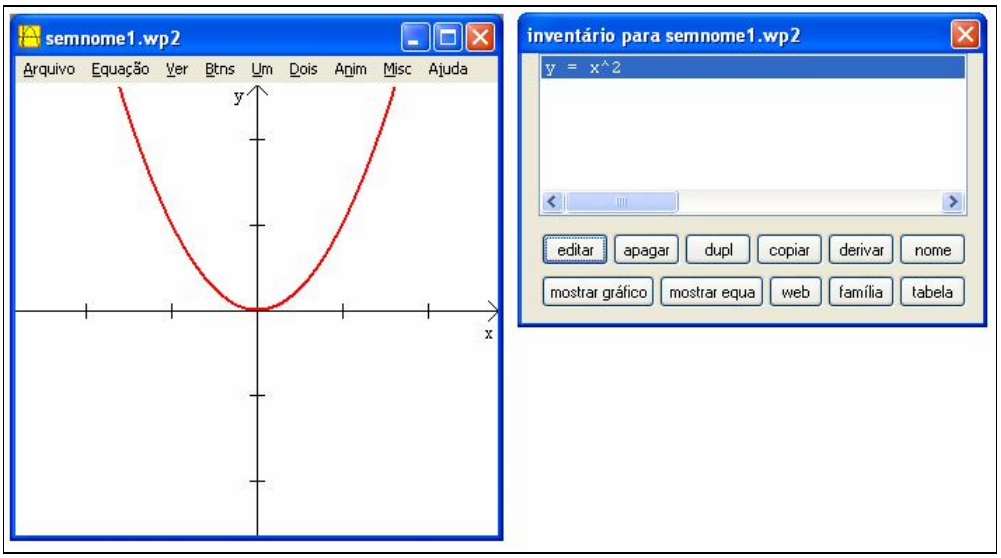


Figura 18 - Interface do Winplot: construção do gráfico da equação $y=x^2$.

Apesar de se propor articular os registros gráficos e algébricos, este programa apresenta algumas limitações com relação as dificuldades observadas em nossa pesquisa, como por exemplo, não escrever as equações em mais de uma forma; e apesar de permitir que se alterem os coeficientes da equação, possibilitando a articulação da expressão algébrica para a representação gráfica, o usuário não pode mover o gráfico para obter alterações na equação. Isso impossibilita uma apreensão global das variáveis visuais, uma vez que não são explicitadas as interseções com os eixos e as coordenadas do vértice.

- **Function Probe**

O software Function Probe foi desenvolvido na Cornell University, por uma equipe liderada por Jere Confrey, e permitia explorar a ideia de funções através de múltiplas representações (equação, gráfico e tabela) disponíveis em três janelas. Aqui, o aluno poderia explorar as funções pela manipulação de uma representação ou através das ligações entre as várias representações. Gomes Ferreira (1997) destaca que no caso mais específico da manipulação da expressão simbólica e da representação gráfica, o aluno podia:

- editar a expressão de uma função e representá-la.
- efetuar operações geométricas como dilatação-contração horizontal ou vertical, translação horizontal ou vertical ou reflexão em torno de um eixo vertical, horizontal ou oblíquo (y=x), observando os efeitos dessas operações geométricas sobre a expressão simbólica da função.

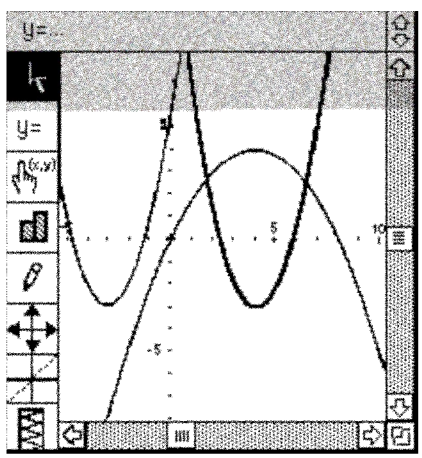


Figura 19 – Exemplo da interface do Function Probe.

De fato, as ferramentas oferecidas por esse software são interessantes no contexto da nossa pesquisa, desde que elas permitam articular os registros simbólicos ou algébricos e o gráfico através das ligações entre as transformações geométricas da curva e as transformações simbólicas das expressões. Porém, como no caso do GeoGebra, não temos como ter duas formas da equação de uma mesma curva ao mesmo tempo. E mesmo querendo utilizá-lo, ele não está mais disponível e somente rodava no Macintosh (Apple). Todavia, entendemos sua importância em abordar ideias fundamentais sobre a manipulação das funções e seus gráficos em ambientes computacionais.

Os softwares apresentados anteriormente, apesar de suas qualidades e características destacadas, não atenderam às necessidades do nosso trabalho pelas razões já discutidas; fazendo-se necessário o desenvolvimento de um aplicativo que contemplasse as exigências levantadas durante a análise do estudo piloto, ou seja, oferecer um tratamento dinâmico na passagem tanto das formas algébricas para a forma geométrica, como o contrário.

Essa situação fez surgir o desafio de definir e desenvolver um aplicativo capaz de representar o gráfico e suas respectivas equações, permitindo, além disso, que a partir do movimento de alguns pontos no gráfico – relacionados às variáveis visuais, como: os pontos de interseções com os eixos e o vértice – pudessem ser obtidas modificações nas suas representações algébricas, também explicitadas na interface do software. De maneira análoga, modificando os coeficientes das equações em qualquer uma de suas formas - unidades simbólicas correspondentes – deveria se obter as alterações no gráfico e nas demais formas algébricas; neste último teríamos o *tratamento* das equações.

Assim, considerando os trabalhos de Duval (1988, 2005) e de Maia (2007), bem como, as necessidades levantadas em nosso estudo, desenvolvemos um aplicativo ad hoc denominado *Formas,* um software que apresenta funcionalidades indo no sentido dos desenvolvimentos da nossa pesquisa, que será descrito no capítulo 05.

4. METODOLOGIA

As condições de uma pesquisa que enfoca a compreensão das dificuldades resultantes da aprendizagem em matemática e as implicações da utilização de ferramentas computacionais nesse processo – considerando-se que essa aprendizagem pode ressaltar fenômenos complexos[21] - fez surgir a seguinte indagação: como estudar esses processos? A esse respeito, Duval (2005) destaca:

> Dado que o objetivo da pesquisa é colocar em evidência os mecanismos próprios da compreensão em matemática, não se podem analisar as produções dos alunos unicamente por meio de critérios matemáticos, procurando reconstruir de maneira mais ou menos hipotética os procedimentos utilizados. Os mecanismos de compreensão não ressaltam somente justificações feitas pelos alunos – eles dependem de um funcionamento cognitivo que se deve poder descrever (p. 24).

A sugestão dada pelo autor destaca uma análise focada na tentativa de entender os mecanismos de compreensão em matemática associado ao funcionamento cognitivo. Para entendermos as condições de aquisição dos conhecimentos matemáticos, foi necessário nos ater a um modelo que estivesse centrado nas condições cognitivas de compreensão, ou seja, específicas de acesso aos objetos matemáticos. Nesse sentido, nos apoiamos em Duval (2005), ao destacar o papel central da diversidade dos registros de representações semióticas no processo de compreensão matemática.

> Os métodos a serem utilizados numa pesquisa são sempre relativos à natureza dos fenômenos a estudar. Ora, acabamos de ver que os fenômenos cognitivos reveladores da atividade matemática concernem à mobilização de vários registros de representação semiótica e à conversão dessas representações (p. 24).

Aqui o autor esclareceu dois pontos importantes: o primeiro diz respeito à dependência dos métodos a serem adotados com relação às especificidades dos

[21] Visto que se faz necessário, ao mesmo tempo, levar em conta exigências científicas próprias dos conteúdos matemáticos e o funcionamento cognitivo do pensamento humano.

fenômenos; e o segundo indicou que os fenômenos cognitivos em matemática estão associados à mobilização e à conversão dos registros de representação semiótica.

Para observar esses fenômenos nas produções dos alunos, adotamos alguns procedimentos do método apresentado por Duval (2005), que vem sendo usado desde seu trabalho (1988) sobre a complexidade cognitiva da articulação entre gráficos e equações, que permitiu evidenciar as variáveis cognitivas mais importantes, dentre todas as variações estruturais possíveis das representações de um registro.

Ainda na fase de elaboração das atividades, cuidamos em distinguir as questões cujas resoluções envolviam *transformações por tratamento* daquelas que exigiam *transformações por conversão*, visto que, apenas as que envolviam conversões nos interessavam. Isto está diretamente ligado à *natureza dos registros* a serem estudados: se corresponde a uma mudança de registro internamente - tratamento - ou se envolve a passagem de um registro para outro - conversão. Como exemplo, citamos a passagem das equações para o gráfico, e vice-versa, que corresponde a uma conversão, pois trata da mobilização em paralelo de dois registros diferentes, e a articulação entre equações, dizendo respeito a o tratamento, pois consiste em uma simples mudança de representação, interna às equações.

Por tratar da articulação de dois registros em relação à representação de um objeto matemático, nossas atividades foram constituídas de questões que tratavam a conversão nos dois sentidos, ou seja, considerando ora a passagem do gráfico para as equações, ora das equações para o gráfico (invertendo-se os registros de saída e de chegada); em segundo lugar, para cada sentido da conversão houve questões que comportavam casos[22] mais ou menos complexos de não-congruência. Além disso, para posterior utilização da conversão como instrumento de análise,[23] as situações atenderam as seguintes condições destacadas por Duval (2005):

[22] Embora sugeridos por Duval (2005), os casos de congruência não foram abordados por não serem do interesse de nossa pesquisa.

[23] Outro aspecto a ser analisado, diz respeito a explorar as variações de congruência e não-congruência, mas em nossas atividades preferimos as conversões não-congruentes, pois são nelas que residem as maiores dificuldades, segundo Duval (2005, p. 21).

- Para cada objeto dá-se a representação $R_{1,}$ em um registro de saída A e sua representação convertida R'_1 em um registro de chegada B, ou seja, a representação de saída e conseqüentemente de chegada depende do tipo de passagem que desejamos fazer. Por exemplo, se desejamos fazer a conversão das equações para o gráfico, cada equação implica num registro de saída com representação R_1, e seu gráfico correspondente a um registro de chegada, com representação convertida de $R_{1,}$ denominada de $R'_{1.}$

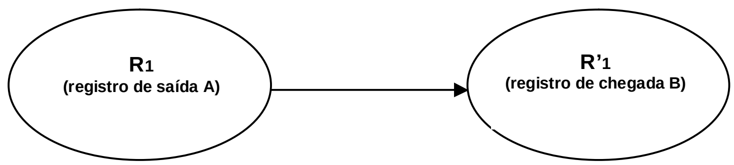


Figura 20 – Representação de saída A e representação de chegada B.

- Produzir todas as variações possíveis de R_1 ... R_n que conservem nas diferentes representações algum elemento ou característica no registro de saída A, analisando as variações simultâneas de R'_1 no registro de chegada B. Isto é, as variações de R_1 no registro A correspondem à manipulação de uma ou de várias variáveis independentes, e as variações que ocorrem ao mesmo tempo no registro B correspondem a valores de uma variável dependente. Neste caso, devemos realizar todas as alterações permitidas nas equações a partir dos seus coeficientes, sendo estas o registro de saída, e acompanhar as mudanças ocasionadas no seu registro de chegada, o gráfico correspondente; ou então, se o gráfico corresponde ao registro de saída, devemos realizar todos os movimentos possíveis através das interseções com os eixos, do vértice e de outro ponto qualquer, e analisar as modificações ocasionadas no registro de chegada, que são suas expressões algébricas.

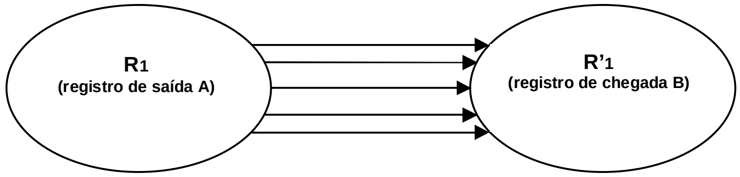


Figura 21 – Variações de R_1 em R'_1.

Devemos considerar que a análise dos tratamentos e a das conversões remetem a dois domínios de problemas cognitivamente diferentes. Uma vez que o grau de profundidade das dificuldades, levantadas para a aprendizagem da matemática, no que se refere às atividades de conversão são mais complexas quando há necessidade ou não de passagens entre registros.

A seguir apresentaremos os participantes o aplicativo e as duas etapas da pesquisa: a primeira denominada preliminar, continha uma atividade, e a segunda, duas atividades; uma delas exigia dos alunos a utilização de uma ferramenta computacional, desenvolvida a partir das necessidades evidenciadas durante a análise da primeira fase.

4.1. Participantes

Participaram deste estudo 10 alunos da 3ª série do ensino médio de uma escola pública federal de ensino (primeira fase) e 06 de uma escola da rede privada (segunda fase), ambas da cidade do Recife-PE. Na escolha das escolas foi considerado a disposição dos alunos em colaborar, a existência de um laboratório de informática e a proposta pedagógica em sintonia com os documentos oficiais do Ministério da Educação.

4.2. Primeira etapa: estudos preliminares

Elaborada com a finalidade de colaborar na identificação inicial das dificuldades dos estudantes ao realizarem a passagem das expressões algébricas para sua representação gráfica, e vice-versa. A sua análise, com base na teoria dos registros de representações semiótica de Duval (2005), evidenciou algumas dificuldades e, ao mesmo tempo, apontou para a necessidade de se utilizar um programa computacional que viesse favorecer a manipulação das equações e dos gráficos, visto que algumas questões exigiam um tratamento dinâmico, especialmente na passagem do gráfico para suas expressões algébricas.

4.3. Construção do Aplicativo

Além dos estudos preliminares, buscamos nos trabalhos de Duval (1988, 2005) e Maia (2007), bem como, na transposição informática, fundamentos para definir e desenvolver um aplicativo *ad hoc*, denominado Formas.

4.4. Segunda etapa

O propósito desta etapa foi elaborar duas atividades, com questões contemplando quatro tipos de dificuldades apontadas na fase preliminar, uma delas aliada ao aplicativo. Com isso pretendíamos identificar dificuldades e compreender as implicações de um programa computacional na articulação das formas.

4.4.1. Primeira atividade (sem aplicativo)

Constituída pelas seis questões da atividade da fase preliminar, responsáveis por evidenciar a maioria das dificuldades, a primeira atividade teve por finalidade identificar as dificuldades do novo grupo de alunos e compará-las com as do primeiro. Lembramos que nesse momento não foi permitido o uso do software para a movimentação dos gráficos e/ou realizar mudanças nas equações. Nesta atividade os alunos participantes trabalharam individualmente.

4.4.2. Segunda atividade (com aplicativo)

Na segunda atividade, tínhamos oito questões organizadas em dois grupos: as duas primeiras abordavam a passagem da forma geométrica para as formas algébricas, e as demais envolviam as conversões entre a forma geométrica e suas respectivas formas algébricas, e entre as expressões algébricas e a representação gráfica. Aqui os alunos deveriam usar as ferramentas do aplicativo Formas para favorecer a articulação entre as expressões algébricas e a representação gráfica, permitindo uma apreensão global qualitativa, destacando as variáveis visuais e as unidades simbólicas correspondentes. Esta característica consiste no reconhecimento, caracterizado pela identificação dos objetos por suas múltiplas ocorrências representacionais, segundo Duval (2005, p. 28), tão importantes para a aprendizagem quanto as tarefas de produção. Aqui os alunos desenvolveram as atividades em duplas.

4.5. Análise dos resultados

Para a análise foram considerados os dados coletados a partir dos protocolos (registros material e virtual[24]) dos alunos, e através das anotações realizadas durante e ao final dos encontros. Após entregarem as atividades, o professor-pesquisador questionava alguns procedimentos, dúvidas e decisões, observados durante a sessão, visto que o mesmo ficava circulando na sala ou no laboratório de informática. Isso permitiu que acompanhássemos de perto como os alunos - primeiro individualmente (atividade sem aplicativo) e depois em duplas (atividade com aplicativo) - procediam na articulação entre equações e gráfico.

Uma vez organizadas as informações, seguimos para categorização e análise dos dados, objetivando discriminar, dentre as variações estruturais possíveis das representações em dado registro, aqueles que são cognitivamente importantes no registro de partida, ou seja, os que provocam uma modificação da representação concomitante no registro de chegada, porque isso implica um novo objeto denotado.

Essa análise permite identificar os erros e as dificuldades dos alunos na articulação entre os registros algébricos e o registro gráfico.

[24] Na atividade envolvendo o aplicativo utilizamos um programa que capturou todos os movimentos realizados pelas duplas na interface do software.

5. DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Agora trataremos do desenvolvimento de cada etapa, descrevendo sua realização e os procedimentos adotados, apresentando as atividades juntamente com as análises dos registros dos alunos.

5.1. PRIMEIRA ETAPA: ATIVIDADE PRELIMINAR

A atividade preliminar teve como finalidade inicial proporcionar condições – através da resolução dos problemas propostos - para identificar e tentar compreender as dificuldades dos estudantes ao tentarem articular as expressões algébricas à representação gráfica, da equação quadrática.

Desse modo, elaboramos e aplicamos uma atividade para ser resolvida individualmente em um encontro. Contamos com a participação de 10 alunos, que trabalharam durante aproximadamente 2 horas na produção de soluções para as questões propostas. Neste caso, no início do encontro era explicado aos alunos apenas que deveriam propor soluções aos problemas da atividade, que envolviam equações e gráficos.

5.1.1. Descrição das questões da 1ª etapa e as possíveis soluções a serem propostas pelos alunos

As questões que compuseram a atividade preliminar destacavam as conversões entre as formas algébricas e a forma geométrica, da equação quadrática, e foram organizadas contemplando situações onde se partiam das formas algébricas para se chegar à forma geométrica; ou, dada a forma geométrica para obterem as formas algébricas; e outras que exigiam a passagem das formas algébricas para a geométrica, e desta para as algébricas simultaneamente, como apresentado na tabela a seguir:

Questões	Formas Algébricas ↓ Forma Geométrica	Forma Geométrica ↓ Formas Algébricas	Formas Algébricas ↓↑ Forma Geométrica
01			**X**
02		**X**	
03			**X**
04	**X**		
05			**X**
06		**X**	
07			**X**
08		**X**	
09		**X**	
10			**X**

Quadro 07 - Questões relacionadas ao tipo de articulação

As questões foram organizadas em três grupos de articulações, como descrito abaixo:

- Os problemas 01, 03, 05, 07 e 10 apresentavam as mesmas características, ou seja, articulavam a passagem da forma geométrica para as formas algébricas.
- As questões 02, 06, 08 e 09 abordavam apenas conversões da forma geométrica, para suas respectivas formas algébricas.
- Apenas a questão 04 tratou de explorar a passagem das equações para o gráfico.

O fato de 09 das 10 questões explorarem as conversões do registro gráfico para as expressões algébricas atende às necessidades já apontadas em estudos anteriores, como Duval (1988), Oliveira (1997) e Maia (2007), tendo em vista sua pouca abordagem nos livros didáticos e por consistir na principal dificuldade dos alunos ao realizarem a passagem da forma geométrica para as formas algébricas.

Para cada uma das questões foram apresentadas as soluções esperadas, todas focadas numa abordagem global qualitativa, considerando as unidades simbólicas correspondentes às variáveis visuais. Em seguida, essas questões foram organizadas em três grupos de acordo com a passagem entre as formas, e suas resoluções comparadas com os procedimentos adotados pelos estudantes, para entender como concebiam e realizavam as conversões entre as expressões gráficas e suas representações algébricas.

A seguir, apresentamos a descrição de cada questão e suas possíveis soluções:

- **Descrição da questão 01**

A primeira questão apresentava seis equações e um gráfico que explicitava os zeros (ou raízes), a intersecção com eixo das ordenadas e as coordenadas do vértice. Nela pretendia-se que os alunos indicassem qual (quais) equação (equações) corresponderia(m) à curva dada. Para isso, deveriam anotar o procedimento utilizado na resposta à pergunta.

Possíveis soluções:

O aluno poderia usar uma das três formas algébricas na busca pela resolução deste problema, como mostraremos a seguir:

- Forma fatorada

Uma vez que eram sabidos quais os zeros, bastava substituí-los na forma $y = a(x - x')(x - x'') \Rightarrow y = a(x-1)(x-3)$.

Em seguida, bastava substituir um dos pares ordenados (-1, 2) ou (0, 3) para encontrar o coeficiente $a = 1$ e obter a forma algébrica fatorada $y = (x-1)(x-3)$. As demais formas poderiam ser obtidas desenvolvendo a forma fatorada.

Caso os alunos não atentassem para o procedimento descrito anteriormente, poderiam encontrar as outras formas da seguinte maneira:

- Forma desenvolvida

Neste caso, podia-se proceder de dois modos:

1. Montando um sistema de equações 3x3: tomando três dos quatros pontos destacados no gráfico (0, 3), (1, 0), (2, -1) e (3, 0) pode-se obter um sistema de equações substituindo-os em $y = ax^2 + bx + c$ para encontrar $a = 1$, $b = -4$ e $c = 3$ e conseqüentemente $y = x^2 - 4x + 3$.

2. Utilizando a relação entre a soma ($x' + x'' = -\frac{b}{a}$) e o produto ($x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$) das raízes da equação, e uma vez que são conhecidos $4 = -\frac{b}{a}$, $3 = \frac{c}{a}$ e $c = 3$ (interseção com o eixo das ordenadas).

- Forma canônica

Esta poderia ser obtida a partir das outras duas formas, pois $m = -\frac{b}{2a}$ e $k = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$, ou então, utilizando as coordenadas do vértice (2, -1), uma vez que estas correspondem a m e k respectivamente. Depois substituiria um dos três pontos (0, 3), (1, 0) ou (3, 0) para calcular o coeficiente $a = 1$ e escrever $y = (x - 2)^2 - 1$.

Resposta: itens i, ii e iii.

- **Descrição da questão 02**

A segunda questão era composta por três gráficos, dos quais apenas um possuía zeros ou raízes reais. Neste caso, era solicitado aos alunos que completassem as equações nas formas desenvolvidas, canônica e fatorada (quando possível) a partir dos pontos explicitados nos gráficos, tais como: as interseções com o eixo das abscissas, as coordenadas do vértice e a intersecção com o eixo das ordenadas.

Possíveis soluções:

Como os três itens exigiam as mesmas idéias para serem resolvidos, vamos comentar a resolução apenas do item b, já que este possui também raízes reais.

Para completar as três formas os alunos poderiam utilizar as coordenadas do vértice para encontrar os valores de m e k da forma canônica e um outro ponto dado para calcular a.

Forma canônica: utilizando as coordenadas do vértice (0, 1) teríamos $m = 0$ e $k = 1$, e substituindo as coordenadas do ponto (-1, 0) ou de (1, 0) encontrariam o coeficiente $a = -1$ e escreveriam $y = -x^2 - 1$.

Neste caso, a forma canônica também corresponderia à forma desenvolvida, que também poderia ser obtida através da resolução de um sistema 3x3, ou pela relação da soma e do produto das raízes.

No caso da forma fatorada, uma vez que eram sabidos quais os zeros, bastava substituí-los na forma $y = a(x - x')(x - x'') \Rightarrow y = a(x-1)(x+1)$.

Em seguida, era suficiente substituir o par ordenado (0, 1) para encontrar o coeficiente $a = 1$ e obter $y = (x-1)(x+1)$.

- **Descrição da questão 03**

Consistia de três itens e exigia que fossem encontradas as coordenadas do vértice e as intersecções com os eixos das ordenadas e das abscissas, quando existir (existirem), do(s) gráfico(s) a partir das equações dadas.

Possíveis soluções:

Para calcular as coordenadas desses pontos bastava que os alunos observassem cada uma das três formas, ou seja, para encontrar as raízes era suficiente utilizar a forma fatorada (uma vez que esta explicita-as); a interseção com o eixo das ordenadas é o valor de y para x=0, o que na forma desenvolvida implica no valor do coeficiente c; já para encontrar as coordenadas do vértice bastava observar os valores de m e k, respectivamente x_v e y_v, da forma canônica.

- **Descrição da questão 04**

Composta por três itens, a questão 04, diferente do problema 03 que pedia os pontos notáveis dos gráficos já traçados, esta solicitava que fosse esboçado o gráfico correspondente a cada uma das equações dadas (eram explicitadas nas três formas), utilizando alguns pontos que fossem possíveis de determinar.

Possíveis soluções:

Os pontos necessários para fazer o esboço dos gráficos seriam as interseções com os eixos Ox e Oy, além das coordenadas do vértice. Semelhante a questão 03, para calcular as coordenadas desses pontos bastava que os alunos observassem cada uma das três formas, ou seja, para encontrar os zeros era suficiente utilizar a forma fatorada; uma vez que esta explicita-os, a interseção com o eixo das ordenadas é o valor de y para x=0, o que na forma desenvolvida implica no valor do coeficiente c; já para encontrar as coordenadas do vértice bastava observar os valores de m e k, respectivamente x_v e y_v, da forma canônica.

- **Descrição da questão 05**

A questão 05 envolvia a articulação entre as formas algébricas e a geométrica, englobando a articulação entre três equações e seus respectivos gráficos. Inicialmente era solicitado que fosse esboçado, num mesmo sistema de coordenadas, as curvas das seguintes equações definidas em R: $y=x^2$, $y=x^2+2$ e $y=x^2-2$. Em seguida, o aluno deveria responder aos seguintes itens:

a) Quais as coordenadas dos vértices dessas curvas?
b) As parábolas estão voltadas para cima ou para baixo? Por quê?
c) Todas as parábolas que você esboçou possuem o mesmo eixo de simetria? Caso afirmativo, qual é esse eixo?
d) Como você pode obter os gráficos de $y=x^2+2$ e $y=x^2-2$, conhecendo o gráfico de $y=x^2$?

Possível solução:

a) $V_1 = (0,0)$, $V_2 = (0,2)$ e $V_3 = (0,-2)$
b) Todas têm concavidade para cima, pois $a>0$.
c) Sim. O eixo de simetria é Oy.
d) Correspondem às translações de $y=x^2$, associada ao número de unidades correspondentes ao coeficiente c, quando considerada a forma desenvolvida, e k considerando a forma canônica.

- **Descrição da questão 06**

Composta por 04 itens, a questão 06 exigia que os alunos determinassem pelo menos uma equação para cada curva dada, ou seja, consistia em fazer articulações entre a forma geométrica com as formas algébricas.

Possíveis soluções:

Essa atividade é semelhante à questão 01, em que o aluno poderia usar uma das três formas algébricas na busca pela resolução deste problema, como mostraremos a seguir:

- Forma fatorada

Itens a, b e d: uma vez que eram sabidos quais as raízes, bastava substituí-las na forma $y = a(x - x')(x - x'')$.

Em seguida, era suficiente substituir um dos pares ordenados explicitados para encontrar o coeficiente a e obter a forma algébrica fatorada. As demais formas poderiam ser obtidas desenvolvendo a forma fatorada.

Item c: Usando as relações envolvendo as coordenadas do vértice $x_v = -\frac{b}{2a}$ e $y_v = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ e a informação de que a interseção com o eixo das ordenadas é o ponto de coordenadas (0, c).

Caso os alunos não atentassem para o procedimento descrito anteriormente, poderiam encontrar as outras formas da seguinte maneira:

- Forma desenvolvida

Neste caso, podia-se proceder de duas maneiras (Itens a e b):

1. Montando um sistema de equações a partir dos três pontos destacados nos gráficos, para desse modo encontrar os coeficientes a, b e c.
2. Utilizando a relação entre a soma ($x' + x'' = -\frac{b}{a}$) e o produto ($x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$) das raízes da equação e a interseção com o eixo das ordenadas.

- Forma canônica

Todos os itens: neste caso, poderia ser obtida a partir das outras duas formas, pois $m = -\frac{b}{2a}$ e $k = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$, ou então, utilizando as coordenadas do vértice correspondentes a m e k respectivamente. Depois se substituiria um dos pontos dados para calcular o coeficiente a.

- **Descrição da questão 07**

A questão 07 exigia que os alunos encontrassem as equações de curvas que eram simétricas a outras. Para isso deveriam analisar o coeficiente de cada uma das parábolas e perceber que bastava obter o seu oposto para encontrar a curva simétrica pelo eixo das abscissas.

Possível solução:

Curva III é simétrica à curva II por Ox, sendo sua equação correspondente igual a $y=(-1/2)x^2$. Neste caso, muda-se apenas o coeficiente a, sendo este o oposto de 1/2 da equação II.

Para a curva IV o raciocínio é o mesmo com relação ao gráfico I, tendo sua equação correspondente $Y=(3/2)x^2$.

- **Descrição da questão 08**

Aqui eram apresentados três representações gráficas num mesmo sistema de eixos coordenados, sendo solicitado aos alunos que encontrassem suas respectivas equações (gráficos II e III, com as coordenadas dos vértices respectivamente (-2, 0) e (2, 0)) analisando o gráfico I, cuja expressão algébrica estava explicitada. Em seguida, deveriam responder aos seguintes itens:

a) Como é a parábola representada por II em relação a de $y=x^2$?
b) E a representada por III em relação a $y=x^2$?
c) Quais são as coordenadas do vértice da parábola $y=(x-m)^2$? E da parábola $y=(x+m)^2$?

Possível solução:

a) Perceber que o gráfico de equação $y=(x+2)^2$ translada duas unidades para a esquerda de y.

b) Neste caso, houve translação da curva de equação $y=(x-2)^2$ e duas unidades para a direita do eixo Oy.
c) O gráfico II, que tem equação $y=(x+2)^2$, possui como coordenadas do vértice o par ordenado (-m, 0). Já o III de equação $y=(x-2)^2$ o par ordenado (m, 0)

- **Descrição da questão 09**

Segundo a questão 08, inicialmente era solicitado encontrar as equações de duas curvas (gráficos II e III, com coordenadas dos vértices respectivamente (-2, -3) e (2, 3)) analisando o gráfico I, cuja expressão algébrica é $y=x^2$. Em seguida, deveriam responde aos seguintes itens:

a) Como é a parábola representada por II em relação a de $y=x^2$?
b) E a representada por III em relação a $y=x^2$?
c) E a representada por $y=(x+m)^2 + k$ em relação a $y=x^2$?
d) Quais são as coordenadas dos vértices das parábolas representadas por $y=(x-m)^2+k$?

Possíveis soluções:

a) Perceber que o gráfico de equação $y=x^2$ transladado duas unidades para a esquerda de y e três abaixo do x, implicará num novo gráfico de equação $y=(x+2)^2-3$.
b) Neste caso, houve translação da curva de equação $y=x^2$ de duas unidades para a direita do eixo Oy e de três unidades a cima do eixo x, gerando um gráfico de equação $y=(x-2)+3^2$.
c) O gráfico de equação $y=(x+m)^2+k$ tem suas coordenadas do vértice deslocadas m unidades a esquerda do eixo das ordenadas e k unidades acima do eixo das abscissas.
d) (m, k)

- **Descrição da questão 10**

No nosso entender, não proporcionou comentários que exigissem análise, uma vez que exigia do aluno apenas que ele fizesse corresponder uma coluna com gráficos a outra com equações.

5.1.2. Procedimentos dos alunos ao proporem soluções às questões da atividade experimental

As anotações dos alunos foram divididas em três grupos segundo a passagem entre as formas, e analisadas considerando os mais variados procedimentos, em seguida, foram comparados com os propostos nas soluções esperadas que considerassem uma abordagem global qualitativa do gráfico considerando as unidades simbólicas correspondentes as variáveis visuais, para conhecer como os estudantes concebiam e realizavam as conversões entre as expressões gráficas e suas representações algébricas.

5.1.2.1. Passagem das expressões algébricas para a representação gráfica

A seguir descreveremos como os alunos procederam ao responder a questões 04:

- Para encontrar as raízes foi utilizada a fórmula de Bhaskara - quando poderia ter sido observada a forma fatorada – a interseção com o eixo das ordenadas, o valor de y para x=0 e para as coordenadas do vértice, as relações envolvendo x_v e y_v - em vez de usar a forma canônica - todos os cálculos considerando a forma desenvolvida.

- Houve casos em que as raízes foram calculadas a partir da forma fatorada e a interseção com o eixo das ordenadas pela forma desenvolvida. No entanto, para as coordenadas do vértice, em vez de usar a forma canônica, mais uma vez, foram utilizadas as relações envolvendo x_v e y_v observando os dados da forma desenvolvida.

- Dois alunos (F e J) calcularam as raízes utilizando a fórmula de Bhaskara e a coordenada x_v do vértice como a média aritmética dos zeros ($x_v = \frac{x' + x''}{2}$), em seguida, fazendo substituição na forma desenvolvida encontravam a coordenada y_v do vértice. O interessante é que esses alunos não souberam calcular os zeros da equação $y=(x+4-\sqrt{10})(x+4+\sqrt{10})$, deixando o item sem resposta e alegando que x∉R. Neste caso, houve confusão entre raízes irracionais e raízes não reais.

- Os alunos (A e B) calcularam as raízes do primeiro item, que tinha como forma fatorada y=2(x-2)(x-3) utilizando a forma desenvolvida. No entanto, no terceiro item identificaram as raízes na forma fatorada $y=(x+1)(x+3)$, o mesmo aconteceu no terceiro item, cuja forma era $y=(x+4-\sqrt{10})(x+4+\sqrt{10})$. Podemos observar que no primeiro caso, diferente dos outros (a≠1), os alunos tiveram dificuldades em identificar os zeros a partir da forma fatorada, possivelmente por acreditarem que as raízes seriam diferentes para a=2.

- O aluno (C) tentou esboçar um gráfico para cada equação. Muito embora todas as equações representassem uma única curva.

5.1.2.2. Passagem da representação gráfica para as expressões algébricas

Segue a apresentação de como os alunos procederam ao responder a questões 02:

- Usando as relações envolvendo as coordenadas do vértice $x_v=-\dfrac{b}{2a}$ e $y_v=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ e a informação de que a interseção com o eixo das ordenadas é o ponto de coordenadas (0, c), os alunos organizaram um sistema de equações e encontraram os coeficientes a, b e c da forma desenvolvida. Para calcular a forma canônica desenvolveram a fatoração a partir da forma desenvolvida, com apresentado nos registros do aluno denominado A: $y=x^2-2x+4 \Rightarrow y=x^2-2x+1 \Rightarrow y=(x-1)^2+3$.

- Tomaram os três pontos dados (0, 4), (1, 3) e (2, 4) e substituíram na forma desenvolvida $y = ax^2 + bx + c$ para formar um sistema de equação 3x3 e encontrar os coeficientes a, b e c. Em seguida, por tentativa encontraram um quadrado da diferença, do tipo $(x-m)^2$ que correspondesse a forma desenvolvida e assim escreveram a forma canônica.

- O aluno denominado G, conhecia a forma canônica e não apresentou dificuldades para expressa-la a partir do gráfico.

- O aluno J, não conseguiu completar nenhuma equação.

O item b apresentava um gráfico que interceptava o eixo das abscissas em dois pontos, o que levou os alunos a desenvolverem procedimentos um pouco diferentes dos utilizados no item a. Vejamos:

- Utilizou a relação da soma $x' + x'' = -\frac{b}{a}$ e o produto $x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$ das raízes da equação para encontrarem os coeficientes da forma desenvolvida. Depois escreveu a forma fatorada utilizando as interseções com o eixo das abscissas, mas erra a forma canônica, pois parecia não ter correspondência com gráfico. O curioso neste caso é que primeiro o aluno encontra a forma desenvolvida e somente depois a fatorada, mesmo sabendo o procedimento para encontrá-la independente da primeira. Percebe-se que o aluno não estabelece nenhuma relação entre as equações.

- Em outro caso, em vez de utilizar a soma e o produto das raízes, o aluno usa as relações que envolvem a coordenada x do vértice e o fato do eixo de simetria ser o eixo das ordenadas implicando em b=0, para calcular os coeficientes da forma desenvolvida. Para a forma fatorada usou as raízes e a canônica por tentativa a partir da forma desenvolvida.

- Houve casos onde o aluno encontra a forma desenvolvida, utilizando um dos procedimentos citados anteriormente, e buscou uma fatoração que se aproximasse da forma desenvolvida para obter a forma fatorada e a canônica. Vale ressaltar que, nesta tentativa o aluno nem sempre é bem sucedido.

- Observamos que o foco tem sido sempre encontrar, primeiro a forma desenvolvida, como se esta fosse a única representação algébrica do gráfico, para somente depois, completar as demais a partir de alguma fatoração da primeira. Como conseqüência, os alunos não compreendem a correspondência entre as variáveis visuais e as unidades simbólicas, isto é, cada uma das formas algébricas está associada a uma propriedade do gráfico.

- Mesmo apresentando dificuldades para responderem as questões, os alunos conseguiram usando algum procedimento, e apenas o aluno j declarou não saber fazer de maneira nenhuma a passagem do gráfico para as equações.

Agora, como os alunos procederam ao responder a questão 06:

- Identificaram as interseções do gráfico com o eixo das abscissas e substituíam as coordenadas x na forma fatorada. O interessante é que em todos os casos foram escritas a forma desenvolvida, como se esta correspondesse de fato a expressão algébrica da curva.

- Alguns alunos usaram a relação da soma e do produto das raízes para calcular os coeficientes da forma desenvolvida, e outros formaram um sistema de equações a partir dos pontos explicitados.

- O aluno G que conhecia a forma canônica, uma vez que a encontrava utilizando as coordenadas do vértice, desenvolvia o quadrado da diferença para encontra a forma desenvolvida. Um fato que chamou a atenção é que a estratégia utilizada nos itens b e c, não funcionou no item d, que possuía raízes duplas, ou seja, a coordenada x do vértice coincidiu com a interseção do gráfico com o eixo das abscissas.

- Houve alunos que não conseguiram responder aos itens c e d. Possivelmente por não apresentar raízes reais ou duplas, o que não é muito convencional segundo a abordagem dos livros didáticos.

- Os alunos mesmo encontrando as outras formas algébricas, faziam questão de destacarem a desenvolvida.

- Como três dos quatros itens, continham gráficos que interceptavam o eixo das abscissas, ocorreram várias soluções iniciadas pela forma fatorada.

Em seguida, destacamos como os alunos procederam ao responder a questões 08:

- Os alunos A, e F, apesar de responderem aos itens a, b e c, não escreveram as equações das parábolas II e III.

- O aluno D, inicia os registros dos itens a e b com a forma canônica e depois passa a forma desenvolvida. Neste caso, mesmo percebendo a translação dos gráficos II e III com relação ao I, não conseguiu expressar as coordenadas do vértice quando as parábolas apresentavam equações na forma canônica $y=(x-m)^2$ e $y=(x+m)^2$. Talvez possivelmente por não perceber sua correspondência com as coordenadas do vértice.

- Nesta questão, 50% dos alunos deixaram os itens sem respostas.

Aqui, apresentamos como os alunos procederam na resolução da questão 09:

- Mais uma vez, metade dos alunos não respondeu, ou então, respondeu parcialmente os itens desta questão.

- As questão 7, 8 e 9 exigiam que fossem observados - a partir de um certo dinamismo – alguns gráficos transladados, de modo que partindo de um (cuja equação era dada) os alunos obtivessem as equações dos demais, foram as que apresentaram em média 50% de respostas em branco, isto é, metade dos alunos deixaram de responde-las.

5.1.2.3. Articulação entre a representação gráfica e as expressões algébricas

Inicialmente, destacamos como os alunos procederam ao responder a questão 01:

Analisando os registros dos alunos, percebemos que a maioria buscaram primeiro encontrar a forma desenvolvida e, em seguida, desenvolver as demais equações para ver qual delas eram equivalentes a forma $y = x^2 - 4x + 3$. Outros procedimentos que apareceram, embora realizados por poucos alunos, foram os seguintes:

- Substituir em cada uma das equações os pontos destacados no gráfico, para ver quais eram satisfeitas.

- Apenas um aluno demonstrou conhecer a forma canônica $y = a(x - m)^2 + k$, e utilizou as coordenadas do vértice para encontrá-la.

- Outro procedimento destacado por apenas um aluno consistiu em calcular as raízes de todas as equações dadas e compará-las com as interseções do gráfico com o eixo das abscissas.

A partir da análise das soluções propostas percebemos que os alunos reconhecem apenas a forma algébrica desenvolvida como sendo a equação da forma geométrica não fazendo articulação entre esta e as outras duas (canônica e fatorada).

Agora, Como os alunos procederam na resolução da questão 03:

- Para encontrar as raízes e a interseção com o eixo das ordenadas, foram utilizadas respectivamente a forma fatorada e a forma desenvolvida, nesta última, para x=0, então, y=c. Já para calcular as coordenadas do vértice, em vez de usar a forma canônica, foram utilizadas as relações envolvendo x_v e y_v observando os dados da forma desenvolvida, como em outras questões anteriores.

- Alguns alunos usaram a soma e o produto das raízes ou a fórmula de Bhaskara para obter as raízes, muito embora estas estivessem explicitadas na forma fatorada. No caso das coordenadas do vértice calculou-se a média aritmética das raízes ($x_v = \frac{x^{'} + x^{''}}{2}$), em seguida, fazendo substituição na forma desenvolvida encontravam a coordenada y do vértice. O interessante é que estes alunos (D e F) não souberam calcular as coordenadas do vértice do item c, pois nesse caso não havia interseção com o eixo das abscissas, ou seja, não tinha como fazer a média entre as raízes, pois não existiam em R.

- Um aluno (G) conhecia a forma canônica e calculou as coordenadas do vértice a partir de $x_v = m$ e $y_v = k$. Muito embora tenha conseguido fazer a articulação entre a forma canônica e o gráfico, o mesmo não ocorreu com a fatorada. Ao que tudo indica, este processo está relacionado a um procedimento mecânico.

- A forma canônica não possui significado algum para a maioria dos alunos, haja vista apenas um aluno a utilizou, e mesmo assim de forma equivocada em algumas questões.

- Alguns alunos demonstraram que só sabiam calcular a coordenadas $x_v = \frac{x^{'} + x^{''}}{2}$, a partir das raízes, e y_v através da substituição de x_v na forma desenvolvida. No entanto, quando $x \notin R$, eles não conseguiram calcular as coordenadas do vértice. Isso seria facilmente resolvido caso soubessem articular a forma canônica ao gráfico.

Neste caso, os alunos procederam na resolução da questão 05 da seguinte maneira:

- O aluno D, escreveu no item c: “Não entendo eixo de simetria”. O mesmo não conseguiu escrever as coordenadas das parábolas no item a.

- Há o caso onde o aluno (G) constrói os gráficos transladados de $y=x^2-2$, com deslocamento sobre o eixo x, em vez de y. Uma aplicação equivocada da forma fatorada.

E por fim, como os alunos procederam na resolução da questão 07:

A curva III é simétrica a curva II pelo eixo das abscissas, sendo sua equação correspondente igual a $y=(-1/2)x^2$. Neste caso, muda-se apenas o coeficiente a, sendo este o oposto de 1/2 da equação II. Para a curva IV o raciocínio é o mesmo com relação ao gráfico I, tendo sua equação correspondente $Y=(3/2)x^2$.

Vale salientar que, cinco alunos não responderam esta questão e dois escreveram a equação errada, sem nenhuma justificativa. Novamente temos uma questão envolvendo dinamismo dos gráficos com alto índice de questões sem respostas.

5.1.3. Análise dos registros dos alunos

A análise dos procedimentos adotados nas respostas de cada uma das questões se deu a partir da organização das questões em três grupos, os que envolviam apenas a passagem das equações para o gráfico, do gráfico para as equações ou envolviam os dois tipos. Depois de identificadas, as dificuldades foram categorizadas em quatro tipos, considerando os aspectos conceituais e os procedimentos recorrentes em cada resposta.

5.1.3.1. Questão que envolvia a passagem das expressões algébricas para a representação gráfica

Tratamento[25]*das formas algébricas e o dinamismo na conversão das formas algébricas para a forma geométrica:* embora as coordenadas do vértice estivessem explicitadas na forma canônica, foram utilizadas as relações envolvendo x_v (coordenada x do vértice) e y_v (coordenada y do vértice) a partir da forma desenvolvida. Isso nos leva a perceber que possivelmente os alunos não reconhecem as unidades simbólicas correspondentes, ou seja, a finalidade de cada uma das formas algébricas com relação a sua representação gráfica. Mesmo sendo o tipo de atividade mais contemplada nos livros didáticos, foi possível perceber que existem algumas dificuldades, especialmente se a forma algébrica não for a desenvolvida. Como exemplo, podemos observar a figura a seguir:

[25] No sentido de Duval corresponde a uma transformação interna ao tipo registro.

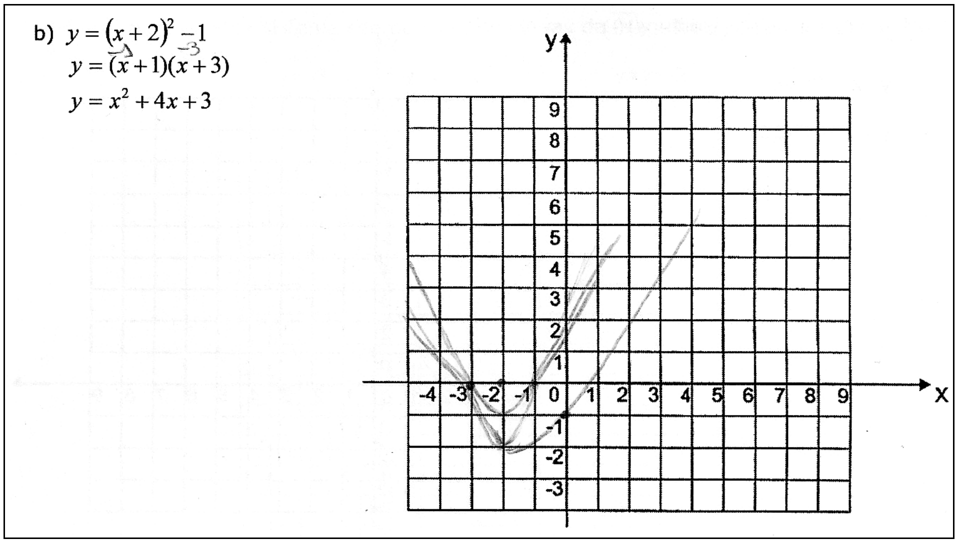


Figura 22 – Solução do aluno C para o item (d) questão 04 da atividade experimental.

Neste caso, o aluno (C) esboçou um gráfico para cada forma da equação quadrática, muito embora todas as equações representassem uma única curva.

5.1.3.2. Situações envolvendo a passagem da representação gráfica para as expressões algébricas

- *Tratamento das formas algébricas (o foco está sempre na forma desenvolvida) e utilização do processo "ponto a ponto"*[26]*:* para encontrar as equações correspondentes ao gráfico, que explicitava as coordenadas dos pontos de interseção com o eixo das abscissas, os estudantes partem da relação soma $x' + x'' = -\dfrac{b}{a}$ e produto $x' \cdot x'' = \dfrac{c}{a}$ das raízes da equação (pontos explicitados no gráfico) para primeiro encontrar a forma desenvolvida e só depois a fatorada, como se esta não pudesse ser obtida diretamente do gráfico. Já a forma canônica – não conseguem escrevê-la - parece não ter relação alguma com a representação gráfica.

[26] Procedimento mais abordado nos livros didáticos para construção de gráficos, no qual os pontos são obtidos por substituição na expressão algébrica e, então, localizados em um sistema cartesiano para que se possa traçar a curva ligando estes pontos, ou então, fazendo a operação inversa. Segundo Duval (1988) esse procedimento pode levar ao surgimento de "obstáculos" na articulação dos registros algébricos e gráficos.

Os procedimentos desenvolvidos pelos alunos nessas situações revelam - além das dificuldades em realizarem a conversão do registro gráfico para as representações algébricas - o desconhecimento da possibilidade de *tratamento* entre as formas algébricas. Acrescenta-se a isso o fato de que o foco é sempre encontrar primeiro a forma desenvolvida, como se esta fosse a única representação algébrica do gráfico, para, em seguida, completar as demais a partir de alguma fatoração. Possivelmente o grande reconhecimento da forma desenvolvida deva-se ao fato de ser a mais abordada nos livros didáticos, que exploram pouco a forma fatorada e quase nunca a canônica[27].

- *Existência de uma só interseção do gráfico com o eixo das abscissas – raízes reais duplas – ou quando o gráfico não interceptava o eixo das abscissas – não existem raízes reais:* De todos os alunos participantes da atividade experimental, apenas um (denominado G), demonstrou conhecimento acerca da forma canônica. Isso pode ser observado a seguir, na figura 23.

---

[27] Registre-se que o livro, Matemática: contexto & Aplicações, volume 1 (4ª edição, 2007) de Luiz Roberto Dante publicado pela Editora Ática, aborda no capítulo 5 as três formas.

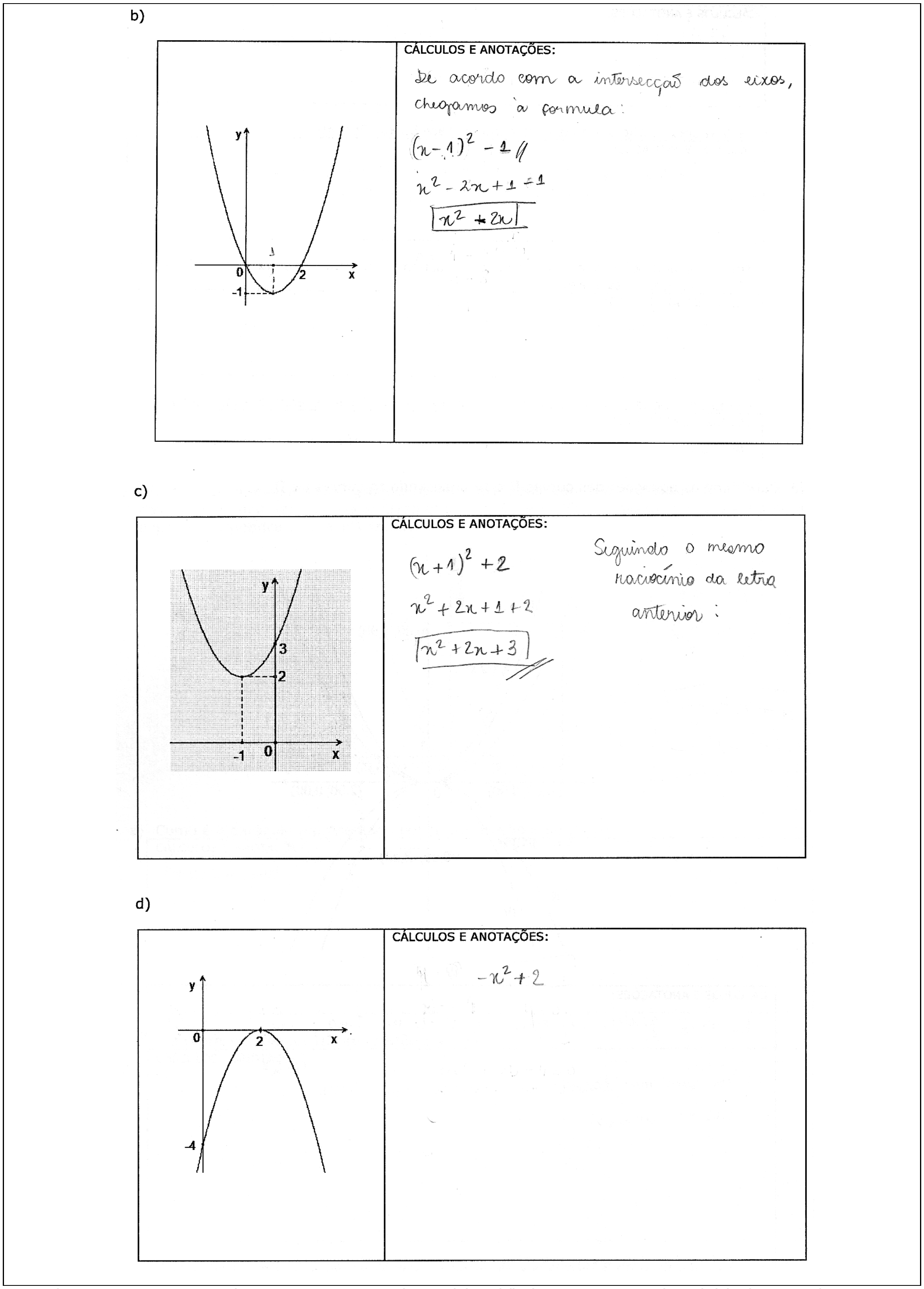


Figura 23 – Solução do aluno G para os itens (c) e (d) da questão 06 da atividade experimental.

Numa questão que exigia fazer a passagem da forma geométrica para as formas algébricas, o estudante utilizou o seguinte procedimento: primeiro encontrava a forma canônica, em seguida, utilizando as coordenadas do vértice, realizava o desenvolvimento do quadrado da diferença para encontrar a forma desenvolvida. Mas, a estratégia utilizada nos itens b e c não serviu no item d, pois havia raízes duplas e o aluno não conseguiu identifica as coordenadas do vértice. Com respeito aos demais alunos, houve dificuldades em responder os itens c (não havia raízes reais) e d (raízes duplas).

- *Exigência de dinamismo na conversão da forma geométrica para as formas algébricas:* As questões 08 e 09 exigiam que, a partir de um certo dinamismo envolvendo a translação do gráfico, fossem encontradas as equações de um gráfico transladado a partir de um outro com sua equação na forma canônica conhecida. Chamou-nos a atenção o fato de 50% dos alunos não ter respondido estas questões.

Muito embora houvesse três questões envolvendo tanto *a passagem da representação gráfica para as expressões algébricas como das equações para o gráfico*, observamos que os procedimentos dos alunos foram semelhantes aos das situações que envolviam apenas a conversão da forma geométrica para formas algébricas, como veremos adiante:

- *Utilização do processo "ponto a ponto":* analisando os registros da questão que solicitava ao aluno identificar quais das expressões algébricas apresentadas (eram 06) correspondiam à representação gráfica dada, como na figura 24, constatamos que a maioria dos alunos buscou substituir os pontos destacados no gráfico em cada uma das equações, para ver quais os satisfaziam. Neste caso percebemos uma possível influência dos livros didáticos, segundo estudos já mencionados.

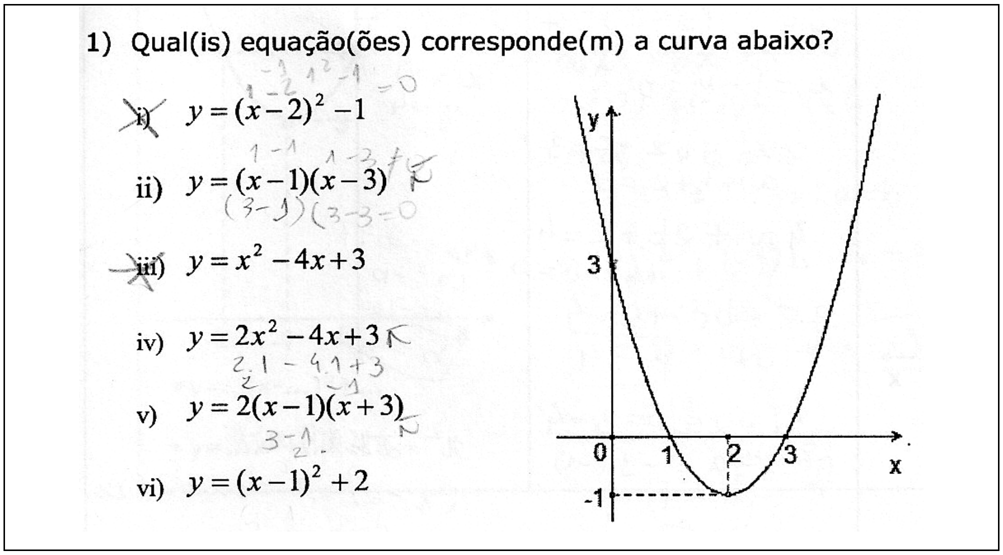


Figura 24 – Estratégia do aluno C para resolver a questão 01 da atividade experimental.

Como podemos observar, o aluno C substitui as coordenadas x, dos pontos de interseção do gráfico com o eixo das abscissas, nas equações, na tentativa de identificar quais delas satisfaziam os pontos de coordenadas (3; 0), nos itens ii e v, e (1; 0) para os itens i, ii e iv.

- *Tratamento das formas algébricas (o foco está sempre na forma desenvolvida):* novamente, notam-se que os alunos tendem a reconhecer apenas a forma algébrica desenvolvida como sendo a equação da forma geométrica, cujo gráfico é a parábola, não fazendo nenhuma articulação entre esta e as outras duas (canônica e fatorada).

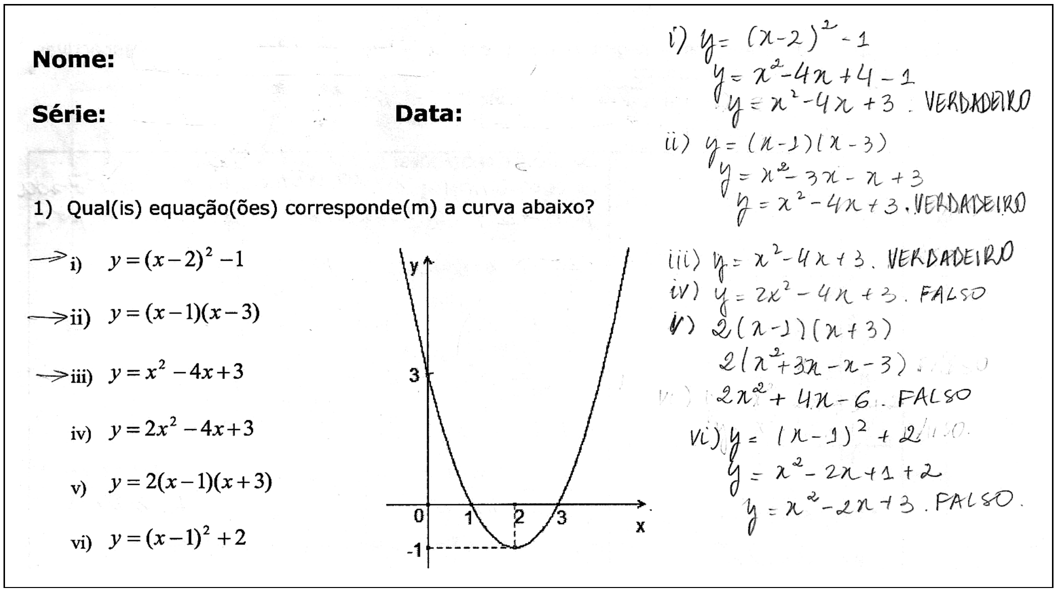


Figura 25 – Solução do aluno A para a questão 01 da atividade experimental.

Neste caso, após encontrar a forma desenvolvida da função quadrática, o aluno (A) desenvolve as demais equações para ver quais delas eram equivalentes a $y=x^2-4x+3$.

- *O gráfico não interceptava o eixo das abscissas – não existem raízes reais: o* interessante é que os alunos (D e F) não souberam calcular as coordenadas do vértice do item c, pois nesse caso não havia interseção com o eixo das abscissas, ou seja, não tinha como calcular as médias entre as raízes, pois estas não eram reais. No entanto, quando $x \notin R$ (não real), eles não conseguiram calcular as coordenadas do vértice, como pode ser observado na questão 26. Isso seria facilmente resolvido caso soubessem articular a forma canônica ao gráfico.

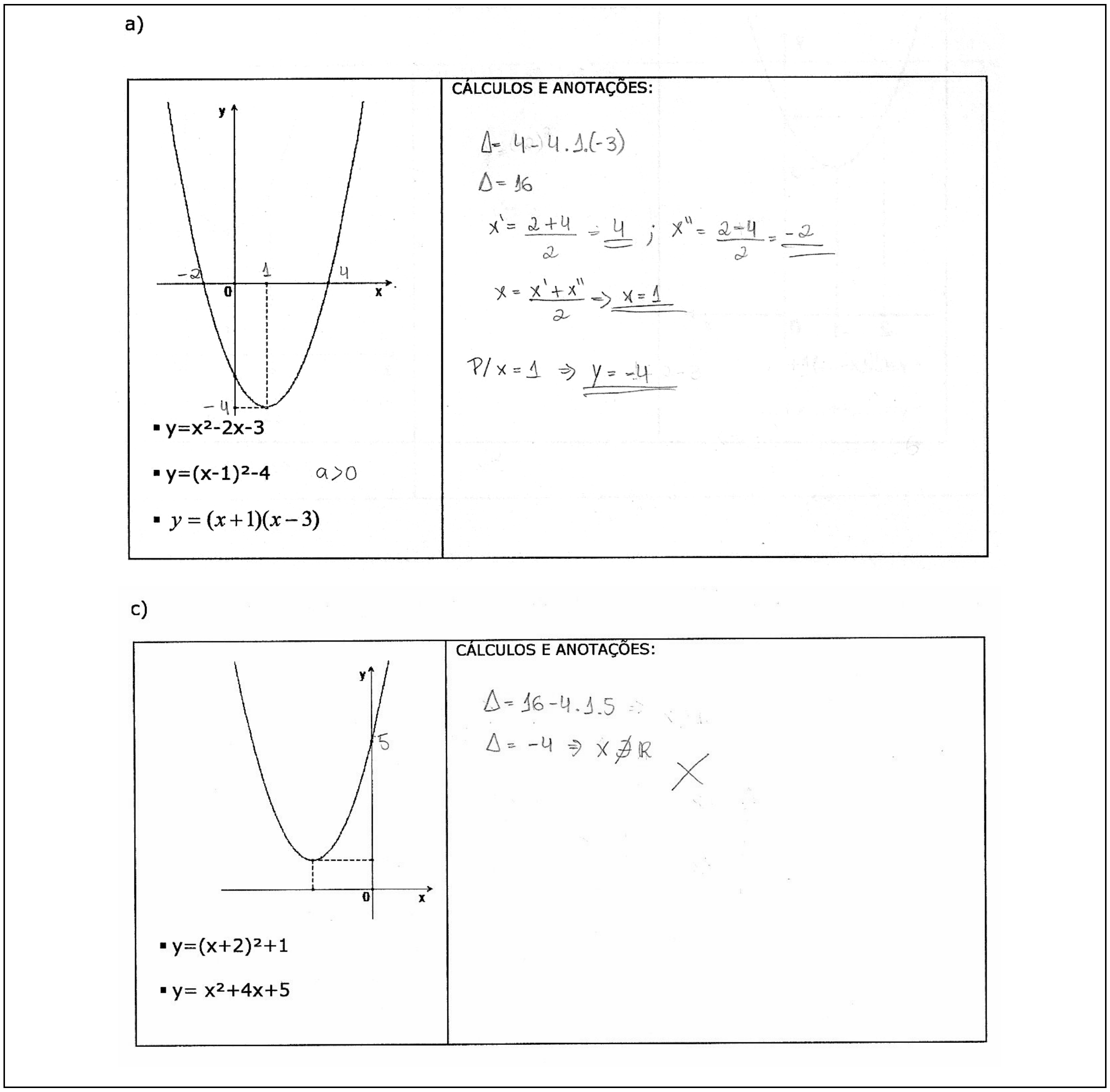


Figura 26 – Soluções propostas do aluno F para os itens (a) e (c) da questão 03 da atividade experimental.

Como mostra a figura anterior, o aluno F não apresentou dificuldades para encontrar as coordenadas do vértice no item (a), visto que, a coordenada x do vértice foi calculada a partir da média aritmética das raízes da equação quadrática na forma desenvolvida, e a coordenada y do vértice, a partir do x do vértice. Porém, esse procedimento está limitado às situações onde há interseção do gráfico com o eixo das abscissas. No item (c), como o gráfico não intercepta o eixo das abscissas, o aluno não consegue encontrar as coordenadas do vértice.

- *Exigência de dinamismo na conversão da forma geométrica para as formas algébricas:* A questão 07 exigia que, a partir de um certo dinamismo envolvendo translação, fossem encontradas ora as equações de um gráfico transladado a partir de um outro, com uma equação - que atendia as três formas algébricas - conhecidas, ora o inverso. Vale salientar que, cinco alunos não responderam esta questão, e dois escreveram a equação errada, sem nenhuma justificativa.

A análise desses procedimentos revelou as mesmas dificuldades que os alunos já haviam demonstrado quando resolveram os problemas das duas categorias que envolviam a passagem da forma geométrica para as formas algébricas; o que proporcionou os mesmos diagnósticos e as mesmas sugestões de encaminhamentos para os referidos casos.

Sendo assim, podemos associar os quatro tipos de dificuldades a dois grupos de questões relacionados às conversões da forma geométrica para a forma algébrica:

- Quanto às questões que envolviam a passagem da representação gráfica para as expressões algébricas:

  A) Não conseguem realizar a passagem, por usarem comumente o procedimento "ponto a ponto", ou seja, a passagem se dá a partir de valores particulares tomados um a um (Duval chama o "ponto a ponto").

  B) Não conseguiram resolver quando o gráfico possui um (raízes duplas) ou nenhum (não havia raízes reais) ponto de interseção com o eixo das abscissas.

- Com respeito às questões que envolviam a conversão entre as formas algébricas e a forma geométrica:

  C) Não propuseram nenhuma resposta às situações que envolviam certo dinamismo com translações – partindo de um gráfico cuja equação era explicitada, para obter as equações das outras representações gráficas originadas da primeira.

D) Realizar *tratamento* entre as formas algébricas - esta dificuldade está atrelada ao fato dos alunos reconhecerem praticamente a forma desenvolvida, limitando a possibilidade de realizarem correspondência entre as variáveis visuais e as unidades simbólicas, uma vez que as outras formas algébricas são ignoradas.

Chamaram atenção os casos correspondentes aos itens B e C, nos quais os estudantes não propuseram soluções, pois como iremos analisar as dificuldades se nada foi registrado! Também foram comprometidas as resoluções das questões associadas ao item D, visto que a conversão, quando realizada, ocorria entre o gráfico e a forma desenvolvida, sendo preciso identificar como se dá a passagem da forma geométrica para as formas algébricas fatorada e canônica.

Isso implica na necessidade de elaborarmos uma atividade com questões que possam contar com algum aplicativo como ferramenta computacional, de maneira que venha proporcionar uma abordagem dinâmica para as articulações, visando favorecer a proposição de possíveis respostas às situações nas quais os estudantes não entenderam e não responderam, ou elaboraram algum tipo de solução, mas os registros não ajudaram na compreensão das dificuldades, como já comentamos anteriormente. Assim, propomos encaminhamentos para cada uma das dificuldades destacadas anteriormente, que deverão nortear a elaboração da 2ª etapa da pesquisa.

Tipos de dificuldades	Encaminhamentos
A, D e C	Propor problemas que requeiram dos alunos a articulação da representação gráfica com as expressões algébricas, exigindo que a atenção esteja centrada sobre um conjunto de propriedades e não sobre os valores particulares tomados um a um. De acordo com Duval (1988), uma apresentação explícita e sistemática das variáveis visuais significativas não só centra a atenção sobre a correspondência entre representação gráfica e a escrita algébrica, mas ela permite encontrar diretamente a expressão algébrica a partir de propriedades geométricas. Isso de certo modo exige um tratamento dinâmico dessas articulações, pois mudanças no gráfico implicam alterações nas equações, e vice-versa.
B e C	Parece interessante explorar situações em que o aluno possa ser questionado a cerca dos procedimentos escolhidos, e que possam descrever algum procedimento diante de questões que envolvem raízes duplas – uma só interseção do gráfico com o eixo das abscissas – e raízes não reais - o gráfico não intercepta o eixo das abscissas. Acreditamos que um aplicativo que proporcione a manipulação e o tratamento dinâmico na articulação de equações e gráficos possa colaborar nesse sentido.
C	Mais uma vez sentimos a necessidade de um aplicativo que seja capaz de representar o gráfico e suas respectivas equações, de modo que, alterando a posição de alguns pontos destacados no gráfico – relacionados as variáveis visuais, como: os pontos de interseções com os eixos e o vértice – possam ser obtidas modificações nas suas representações algébricas também explicitadas na interface do software. Da mesma maneira, quando forem modificados os coeficientes das equações em qualquer uma de suas formas - unidades simbólicas correspondentes – poderemos acompanhar as alterações no gráfico e nas demais formas algébricas. Possivelmente um ambiente computacional que proporcione explorar as articulações com dinamismo, ajude os alunos ao menos a emitirem alguma reposta às questões propostas nessa perspectiva.
C e D	Sugerimos a elaboração de questões que exigissem a exploração das três expressões algébricas com a mesma representação gráfica, de maneira que pudessem proporcionar ao estudante perceber a correspondência entre as unidades simbólicas das formas algébricas e os valores visuais da forma geométrica. Acreditamos que uma ferramenta computacional que possibilite um tratamento dinâmico de gráficos e equações contribua efetivamente para evidenciar tal dificuldade.

Quadro 08 - Encaminhamentos para os tipos de atitudes procedimentais.

Tomando por base as evidências desta primeira fase, percebemos a necessidade de elaborar novas questões que viessem contemplar os quatro tipos de dificuldades destacadas no quadro acima, aliadas a um software que oferecesse um tratamento dinâmico ao gráfico e às equações, visto ter sido essa a dificuldade mais enfatizada nos registros. Com isso pretendíamos compreender as implicações de um programa computacional na identificação das dificuldades - principalmente em questões que não foram respondidas - e na articulação dos registros de representações algébricas e do registro gráfico.

5.2. APLICATIVO FORMAS

Além dos estudos que apontaram para as contribuições do uso de um programa computacional, a análise dos tipos de dificuldades abordadas na etapa experimental também evidenciou a necessidade de utilizar um instrumento que possibilitasse uma abordagem dinâmica das articulações entre equações e o gráfico. Destacamos as situações nas quais os estudantes não propuseram nenhuma solução - exigia dinamismo - e aquelas onde a articulação, quando ocorreu, se deu apenas entre o gráfico e a forma desenvolvida, que foram responsáveis pelo surgimento das seguintes indagações:

- Com se dá a correspondência entre variáveis visuais e unidades simbólicas, em outras palavras, o que acontece na forma geométrica quando os coeficientes são modificados nas formas algébricas? E o que ocorre especificamente com os pontos destacados no gráfico (vértice, interseções com os eixos)?

- Se modificarmos os coeficientes (unidades simbólicas) na forma desenvolvida, quais serão as mudanças ocorridas na forma canônica, na forma fatorada e na sua representação gráfica (variáveis visuais)? E se forem as unidades simbólicas da canônica? E da fatorada?

- O que ocorrerá com as unidades simbólicas das formas algébricas desenvolvida, fatorada e canônica, se forem alteradas as variáveis visuais do gráfico (coordenadas do vértice, interseções com os eixos)?

Abordar a articulação entre os registros de representações algébricos e o geométrico nessa perspectiva, corresponde a um processo de descrição sistemática das variáveis visuais, considerando o procedimento de interpretação global das propriedades do gráfico, onde o conjunto traçado/eixo forma um gráfico que representa o objeto descrito pelas expressões algébricas, possibilitando identificar as modificações realizadas na representação gráfica e nas expressões algébricas, como defende Duval (1988).

Desse modo, com base no trabalho de Duval (1988) e Maia (2007), tratamos de destacar as variáveis visuais pertinentes ao estudo para cada uma das três formas algébricas correspondentes às equações quadráticas, que possuem um conjunto traçado/eixo comum, uma curva aberta denominada parábola.

Variáveis Visuais	**Valores das variáveis visuais**
Concavidade da parábola	Voltada para cima Voltada para baixo
Curvatura da parábola	Maior curvatura Menor curvatura
Interseção com o eixo das ordenadas	Ramo crescente Vértice Ramo decrescente
	Acima da origem Na origem Abaixo da origem

Quadro 09 - Variáveis visuais e valores da forma desenvolvida.

Observando o quadro acima, percebe-se que existem quatro variáveis visuais pertinentes a equação quadrática na forma desenvolvida, as duas primeiras correspondem dois valores, e para a terceira e quarta correspondem três.

Variáveis Visuais	**Valores das variáveis visuais**
Concavidade da parábola	Voltada para cima Voltada para baixo
Curvatura da parábola	Maior curvatura Menor curvatura
Interseção (interseções) com o eixo das abscissas	As duas à esquerda da origem As duas à direita da origem Uma á esquerda da origem e a outra à direita da origem Uma à direita da origem e a outra na origem Uma à esquerda da origem e a outra na origem Uma só interseção na origem Uma só interseção à esquerda da origem Uma só interseção à direita da origem

Quadro 10 - Variáveis visuais e valores da forma fatorada

Para este caso são destacadas três variáveis visuais: às duas primeiras correspondem dois valores e à terceira, oito valores; neste caso, por tratar-se das raízes da equação - pode haver até duas - temos um maior número de possibilidades para sua localização no sistema de eixos.

Variáveis Visuais	Valores das variáveis visuais
Concavidade da parábola	Voltada para cima Voltada para baixo
Curvatura da parábola	Maior curvatura Menor curvatura
Posição do vértice da parábola com relação ao eixo das abscissas	Acima do eixo Na origem Abaixo do eixo
Posição do vértice da parábola com relação ao eixo das ordenadas	A esquerda do eixo Na origem À direita do eixo

Quadro 11 - Variáveis visuais e valores da forma canônica. (MAIA 2007, p. 65)

Aqui temos quatro variáveis visuais, sendo que as duas primeiras são comuns aos três casos, e também correspondem dois valores; já as duas últimas correspondem a três cada uma.

A seguir apresentaremos três quadros - cada um deles relacionados aos três anteriores – onde estarão relacionadas as unidades simbólicas para cada uma das formas algébricas às variáveis visuais correspondentes, de modo que seja possível perceber facilmente que as mudanças ocorridas nas representações algébricas implicam em mudanças na representação gráfica e vice-versa.

Variáveis visuais	Valores	Unidades simbólicas correspondentes
Concavidade da parábola	Voltada para cima Voltada para baixo	Parâmetro a>0 (ausência do símbolo -) Parâmetro a<0 (presença do símbolo -)
Curvatura da parábola	Maior curvatura Menor curvatura	0<IaI<1 IaI=1 (o parâmetro não está inscrito) IaI>1
Interseção com o eixo das ordenadas	Ramo crescente Vértice Ramo decrescente	b>0 b=0 (simetria axial em relação ao eixo das ordenadas) b<0
	Acima da origem Na origem Abaixo da origem	c>0 (o parâmetro corresponde a coordenada y do ponto de interseção) c=0 (o parâmetro não está inscrito) c<0 (o parâmetro corresponde a coordenada y do ponto de interseção)

Quadro 12 - Unidades simbólicas da forma desenvolvida correspondentes às variáveis visuais.

Como podemos observar, temos quatro variáveis visuais correspondentes ao estudo da forma desenvolvida $y=ax^2+bx+c$. Às duas primeiras correspondem dois valores associados ao coeficiente *a* - cujas alterações acarretam mudanças na concavidade e na abertura da parábola - à terceira e à quarta correspondem três valores cada uma, que estão relacionadas aos coeficientes *b* – interfere na interseção do ramo crescente ou decrescente e do vértice com o eixo das ordenadas – e *c*, responsável por indicar onde o gráfico intercepta o eixo das ordenadas.

Variáveis visuais	**Valores**	**Unidades simbólicas correspondentes**
Concavidade da parábola	Voltada para cima	Parâmetro a>0 (ausência do símbolo -)
	Voltada para baixo	Parâmetro a<0 (presença do símbolo -)
Curvatura da parábola	Maior curvatura	0<IaI<1
		IaI=1 (o parâmetro não está inscrito)
	Menor curvatura	IaI>1
Interseção (interseções) com o eixo das abscissas	As duas à esquerda da origem	x’<0, x’’<0 e x’≠ x’’
	As duas à direita da origem	x’>0, x’’>0 e x’≠ x’’
	Uma à esquerda da origem e a outra à direita da origem	x’>0 e x’’<0 ou x’<0 e x’’>0 e x’≠ x’’
	Uma à direita da origem e a outra na origem	x’>0 e x’’=0 (o parâmetro não está inscrito) ou x’=0 (o parâmetro não está inscrito) e x’’>0
	Uma à esquerda da origem e a outra na origem	x’<0 e x’’=0 (o parâmetro não está inscrito) ou x’=0 (o parâmetro não está inscrito) e x’’<0
	Uma só interseção na origem	x’=x’’=0
	Uma só interseção à esquerda da origem	x’<0, x’’<0 e x’=x’’
	Uma só interseção à direita da origem	x’>0, x’’>0 e x’=x’’
	Não existe	A representação algébrica fatorada não está definida.

Quadro 13 - Unidades simbólicas da forma fatorada correspondentes às variáveis visuais.

Analisando o quadro acima percebemos que são destacadas três variáveis visuais pertinentes à forma fatorada *y=a(x-x’)(x-x’’):* às duas primeiras correspondem dois valores ambos relacionados ao coeficiente *a* – articulado à concavidade e abertura da parábola - e à terceira oito valores associados a *x’* e *x’’* , implicando na interseção (interseções) da parábola com o eixo das abscissas.

Variáveis visuais	Valores	Unidades simbólicas correspondentes
Concavidade da parábola	Voltada para cima Voltada para baixo	Parâmetro a>0 (ausência do símbolo -) Parâmetro a<0 (presença do símbolo -)
Curvatura da parábola	Maior curvatura Menor curvatura	0<IaI<1 IaI=1 (o parâmetro não está inscrito) IaI>1
Posição do vértice da parábola com relação ao eixo das abscissas	Acima do eixo Na origem Abaixo do eixo	k>0 k=0 k<0
Posição do vértice da parábola com relação ao eixo das ordenadas	A esquerda do eixo Na origem À direita do eixo	m>0 m=0 m<0

Quadro 14 - Unidades simbólicas da forma canônica correspondentes às variáveis visuais (adaptado MAIA 2007, p. 65).

Neste caso, são quatro variáveis visuais relacionadas à análise da forma canônica $y=a(x-m)^2+k$, onde podemos perceber que as duas primeiras são comuns aos três casos, uma vez que o coeficiente *a* está presente em todas as formas algébricas abordadas neste trabalho e tendo as mesmas implicações, sobre a concavidade e abertura da parábola. Já as duas últimas correspondem a três valores cada uma, com a primeira correspondendo à posição do vértice da parábola com relação ao eixo das abscissas, tendo como unidade simbólica correspondente *k* (três condições), e a seguinte diz respeito à posição do vértice da parábola com relação ao eixo das ordenadas que corresponde à unidade *m* (também três condições).

Desse modo, acreditamos que um dos aportes do computador nesse contexto está na criação de novos registros “dinâmicos” de representação, onde as articulações entre variáveis visuais e unidades simbólicas correspondentes, podem aparecer nas variações conjuntas e contínuas, tanto dos elementos algébricos como geométrico. Assim, após analisarmos softwares que ofereciam a possibilidade de manipulação dos registros algébricos e geométricos - software de geometria dinâmica e analítica e software de representação gráfica de funções - concluímos por desenvolver um software, cujas funcionalidades atendessem as necessidades de nossa pesquisa.

Assim, foi desenvolvido o aplicativo *Formas*[28], um simulador que permite explorar de maneira dinâmica equações quadráticas nas formas algébricas, desenvolvida, fatorada e canônica, simultaneamente articuladas a sua representação gráfica. Esse programa permite tanto a passagem das expressões algébricas para a representação gráfica, quanto do gráfico para as equações. A primeira se dá mediante a possibilidade de modificarmos os coeficientes em qualquer uma das equações; já a segunda é feita a partir da movimentação dos pontos de interseções com os eixos, do vértice, ou através dos demais pontos do gráfico. No último caso, serão preservadas apenas a concavidade e a abertura da parábola.

Destacamos que o interesse desta pesquisa não é estudar os aspectos técnicos do desenvolvimento do software, mas as necessidades que apontaram a sua criação, a elaboração de funções que se deseja que o programa venha executar, bem como, as implicações da utilização desta ferramenta ao proporcionar um ambiente favorável à manipulação e exploração de determinadas propriedades dos objetos matemáticos, só permitidos em ambientes virtuais.

Essa possibilidade de realizar deslocamentos no gráfico e de modificação das equações, e vice-versa, favorecido pelo princípio de manipulação direta destes objetos implantado na interface, permite o acesso rápido e contínuo a muitas situações, constituindo-se numa ferramenta rica na promoção da articulação entre formas algébricas e geométrica.

A seguir apresentaremos alguns exemplos de como pode se dá a articulação entre equações e gráfico utilizando o aplicativo *Formas.* As considerações são obtidas a partir de uma série de movimentos do gráfico e da manipulação das equações, de acordo com as exigências das situações postas ao aluno.

---

[28] Ressaltamos que o desenvolvido do aplicativo se deu em linguagem de programação Java, sendo o mesmo de simples manipulação e de fácil instalação, podendo ser executado em ambientes do Windows ou do Linux.

Inicialmente vamos abordar o caso no qual estão definidas as três formas algébricas.

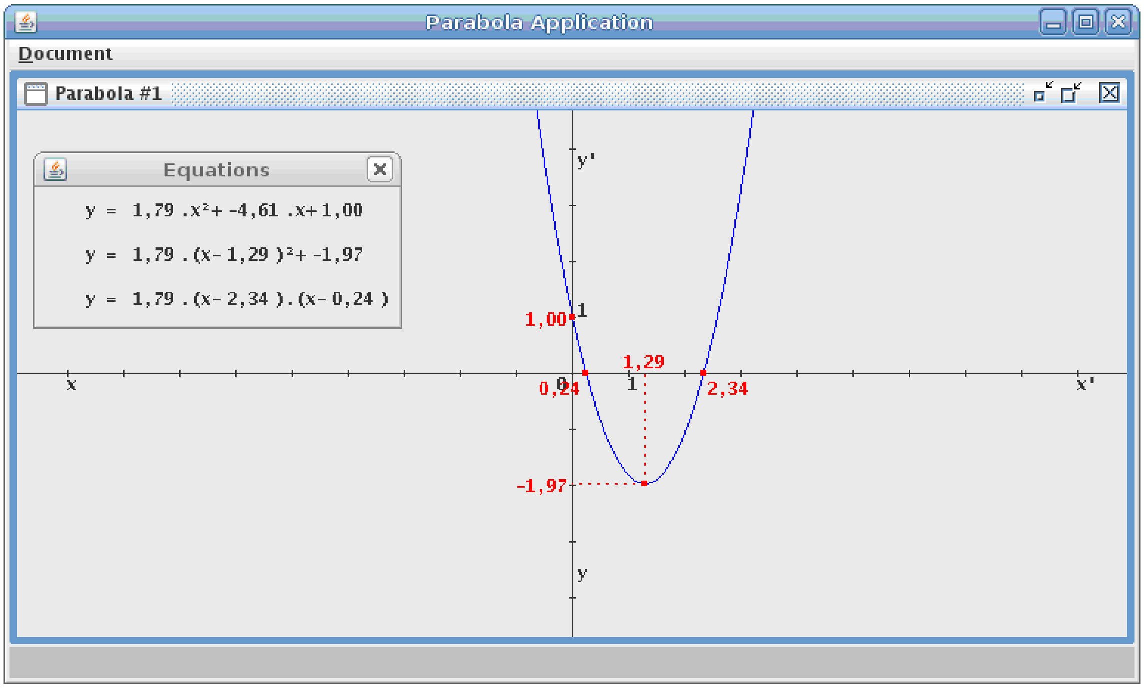


Figura 27 - Interface do aplicativo *Formas*: Gráfico cujas interseções com os eixos são distintas.

Observando o gráfico acima, podemos destacar as implicações das unidades simbólicas (das equações) correspondentes às variáveis visuais (do gráfico):

- O coeficiente *a* comum as três (a=1,79).
- A interseção com o eixo das ordenadas explicitado no gráfico e representado na forma desenvolvida (c=1).
- As unidades simbólicas correspondentes x'=2,34 e x''=0,24, as variáveis visuais (interseções com o eixo das abscissas), explicitadas na forma algébrica fatorada.
- Também são destacadas as coordenadas do vértice na forma canônica, V (m, k) em que m=1,29 e k=-1,97, podendo ser verificada também no gráfico.

Consideremos agora a situação na qual o gráfico apresenta concavidade para baixo e tem uma de suas interseções com o eixo das abscissas passando pela origem.

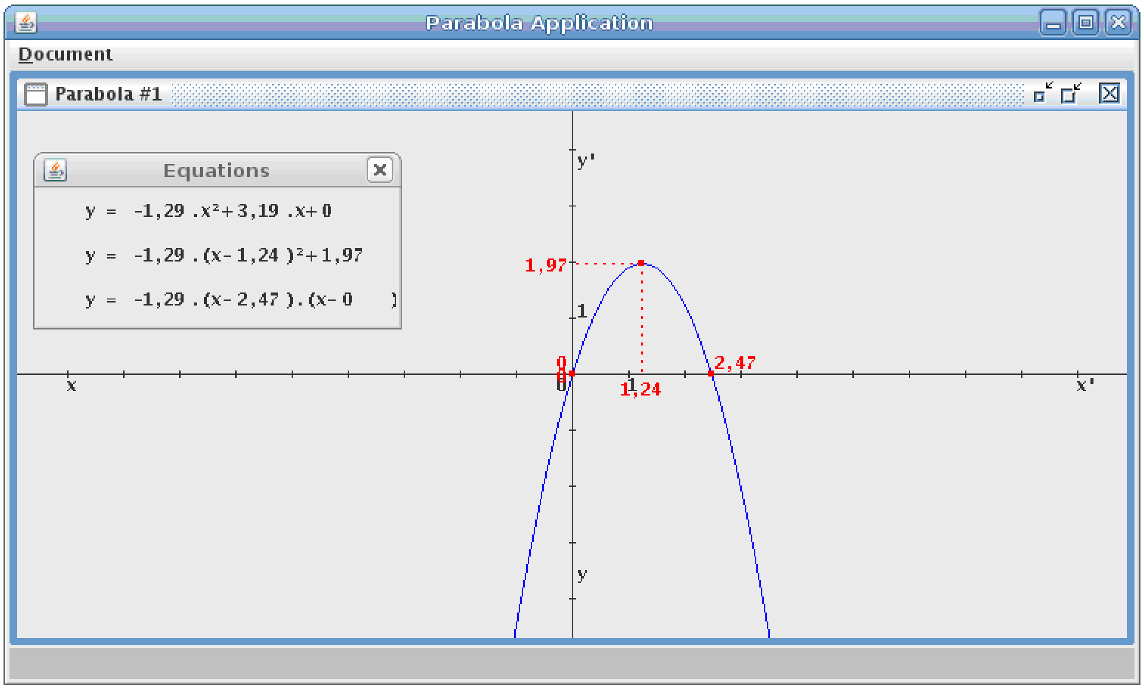


Figura 28 - Interface do aplicativo *Formas*: Gráfico com concavidade para baixo e tendo uma das interseções com o eixo das abscissas igual a zero.

Aqui o gráfico apresenta a concavidade para baixo, diferente do exemplo anterior, o valor de a<0, o que fica evidenciado nas três expressões algébricas. Além disso, sua interseção como o eixo das ordenadas é igual a uma das interseções com o eixo das abscissas, com implicações na equação desenvolvida, fazendo o c=0, e na forma fatorada uma das raízes igual a zero.

No terceiro exemplo, temos um gráfico que não possui interseções com o eixo das abscissas, como vemos a seguir:

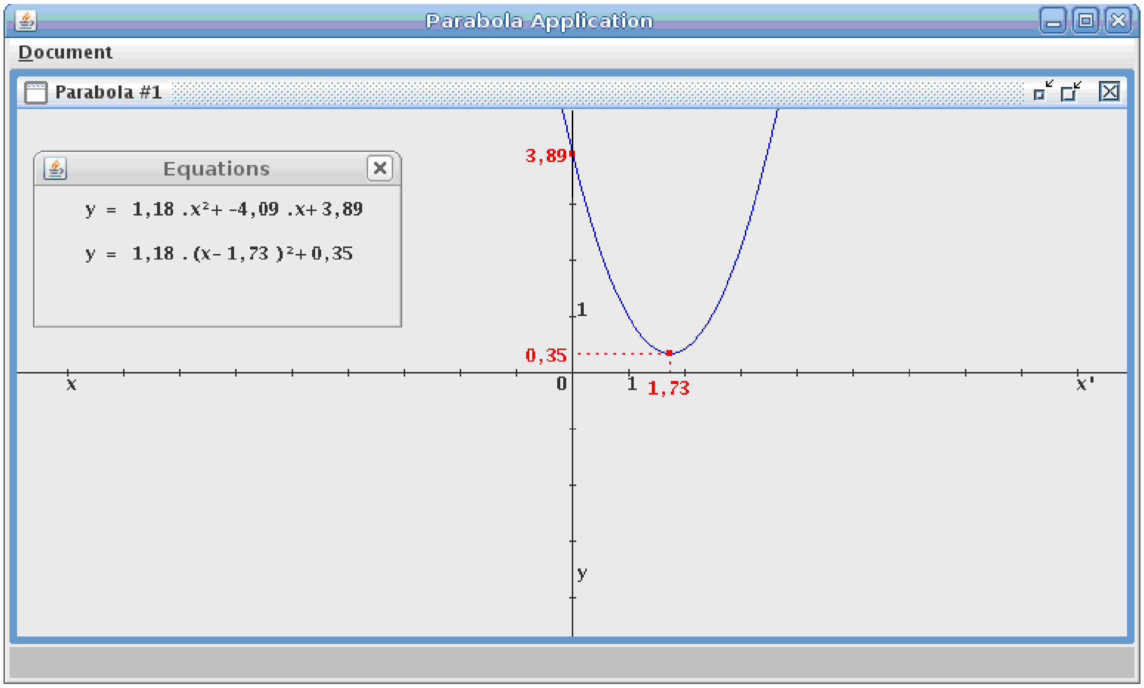


Figura 29 - Interface do aplicativo *Formas*: Gráfico com concavidade para cima a>0, neste caso a forma fatorada não está definida, pois não há interseção com o eixo das abscissas.

Algumas regularidades podem ser observadas a partir da exploração desta situação, como por exemplo:

- Neste caso, como não existe interseção com o eixo das abscissas, não aparece a expressão algébrica na forma fatorada.
- Também são destacadas as coordenadas do vértice na forma canônica, V (m, k), podendo ser verificada também no gráfico.
- A interseção com o eixo das ordenadas aparece destacada no gráfico e corresponde ao coeficiente c na forma algébrica desenvolvida.

O aplicativo *Formas* também dispõe das opções de esconder qualquer uma das equações, ocultar os pontos destacados no gráfico - as interseções com os eixos e o vértice - e impossibilitar o movimento do gráfico; neste caso, o aluno é levado a abstrair acerca das implicações das mudanças ocorridas nos coeficientes das equações, pois não conta com os movimentos da representação gráfica.

Desse modo, o aluno tem a sua disposição um conjunto de ferramentas que pode o auxiliar na medida em que as dificuldades forem emergindo; como, por exemplo, se de antemão já sabemos que irá surgir dificuldades relativas à translação do gráfico, o aluno contará com dispositivos no aplicativo que possibilita realizar translações antes só possíveis na imaginação. Agora pode ser visualizada e explorada, ajudando-o assim no entendimento da situação.

5.3. SEGUNDA ETAPA

Após a realização de estudos prévios, passamos à segunda etapa, que se deu em dois encontros: um para aplicação da atividade 1 (sem aplicativo) e outro da atividade 2 (com aplicativo), com duração de 2 horas cada. No primeiro momento, 06 alunos trabalharam individualmente e, no segundo, em duplas.

5.3.1. Atividade 1 (sem o aplicativo)

Por contar com novos participantes nesta etapa, a primeira atividade foi constituída por seis questões oriundas do piloto (01, 04, 05, 07, 08 e 09, respectivamente; foram selecionadas por terem sido aquelas nas quais os alunos apresentaram o maior número de dificuldades, principalmente as três últimas que não foram respondidas por 50% dos alunos), visto que precisávamos antes entender como eles articulavam as formas algébricas e a forma geométrica, se apresentariam os mesmos tipos de dificuldades, ainda mais considerando que iriam ser submetidos às questões que apresentaram as maiores dificuldades. Desse modo, pretendíamos identificar as dificuldades dos alunos ao articularem equações e gráfico, sem utilizar qualquer ferramenta que pudesse favorecer a movimentação dos gráficos ou mudanças nas equações.

Após analisados os procedimentos descritos pelos alunos para resolução das questões, percebemos que três dos quatro tipos de dificuldades evidenciadas anteriormente na primeira fase foram manifestadas intensamente:

- Procedimento “ponto a ponto”: a passagem se dá a partir de valores particulares tomados um a um.

- Não propuseram nenhuma resposta às situações que envolviam certo dinamismo.

- Não realiza a transformação *tratamento* entre as formas algébricas - reconhecimento centrado na forma desenvolvida.

Com relação à dificuldade relacionada às situações nas quais o gráfico possui um (raízes duplas) ou nenhum (não havia raízes reais) ponto de interseção com o eixo das abscissas, nos parece que a maioria dos alunos inferiram a partir da 1ª questão que três equações poderiam ter o mesmo gráfico, e assim ao resolverem a 2ª, que apresentava três equações e solicitava o esboço do gráfico, os alunos concluíram (de maneira mecânica, pois o desenvolvimento das demais questões evidenciaram que eles não apresentavam uma apreensão global das propriedades do gráfico e das equações) que bastava construir o gráfico para uma das equações, visto que as demais correspondiam ao mesmo gráfico.

Esses resultados, de certo modo, já eram esperados; haja vista a análise realizada no piloto ter revelado que cada tipo de dificuldade verificada estava, de certo modo, associada a algumas causas externas, isto é, não restrita a uma única escola, visto está relacionada a determinadas posturas e abordagens didáticas dos professores nas salas de aulas e de como os livros didáticos enfocam ou deixam de enfocar. Nossos estudos preliminares apontaram, inclusive, para a necessidade de utilização de uma ferramenta computacional para favorecer o tratamento dinâmico do gráfico e das equações.

Encerrada esta atividade, passou-se a segunda, fazendo agora uso do aplicativo *Formas.*

5.3.1.1. Procedimentos dos alunos ao proporem soluções às questões da atividade 1 (sem o aplicativo) e as dificuldades evidenciadas

As descrições e resoluções propostas referentes às questões da atividade 1, já foram explicitadas no campo referente a atividade piloto, neste caso, nos reservaremos apenas a descrever e organizar as produções e procedimentos dos alunos.

Segue a descrição de como os alunos procederam ao responder a questão 01 (01 da atividade experimental):

- Testando as coordenadas de um dos pontos explicitados do gráfico nas equações.
- Reduzindo as equações a forma algébrica desenvolvida, em seguida, usa a relação da soma e do produto.
- Um aluno montou um sistema de equações 3x3, para encontrar a forma desenvolvida.
- Um aluno reduziu as equações à forma desenvolvida e comparou-as encontrando as coordenadas do vértice para cada uma.

Neste caso, as dificuldades identificadas estão associadas:

- Ao processo “ponto a ponto”.
- A redução das demais equações a forma desenvolvida.

Agora, apresentamos a descrição de como os alunos procederam ao responder a questão 02 (04 da atividade experimental):

- Encontrando a interseção com os eixos e as coordenadas do vértice a partir da forma desenvolvida, para isso reduziram todas as outras equações a da forma algébrica desenvolvida.

- Construindo uma tabela através da substituição de pontos nas equações e localizando-os no gráfico.

Aqui, as dificuldades identificadas estão associadas ao não reconhecimento das demais formas algébricas. Isso possivelmente, levou a maioria dos alunos a tentarem resolver todos os problemas a partir da forma desenvolvida, pelo processo ponto a ponto ou calculando as raízes da equação, favorecendo o aparecimento de respostas erradas, pois não há um entendimento das unidades simbólicas correspondentes as variáveis visuais.

Observamos assim, que as duas primeiras questões apresentam os mesmos tipos de erros.

Vejamos como os alunos procederam ao responder a questão 03 (05 da atividade experimental):

- O aluno B interpretou as três equações como sendo na forma desenvolvida, com coeficientes 2 e -2 identificados como sendo o c. Possivelmente 50% dos alunos analisaram esta questão considerando apenas a forma desenvolvida, já que seus procedimentos não evidenciaram a utilização de translação e da forma canônica.
- O aluno F justificou a concavidade para cima citando o coeficiente a e escrevendo em seguida a forma algébrica desenvolvida.
- Metade dos alunos conseguiu relacionar os gráficos como sendo um deslocamento (uma translação) do gráfico de equação $y=ax^2$ sobre o eixo y.

As dificuldades identificadas nesta questão estão associadas:

- A dependência da forma desenvolvida.
- Ao não reconhecem da forma algébrica canônica, comprometendo à correspondência das variáveis visuais as unidades simbólicas.

As questões a seguir apresentaram as mesmas dificuldades nos procedimentos de resolução, também comum as da atividade experimental, relacionados às translações do gráfico, exigindo uma compreensão global e qualitativa das variáveis visuais e das unidades simbólicas correspondentes.

Neste caso, os alunos procederam ao responder a questão 04 (07 da atividade experimental) da seguinte maneira:

- Metade dos alunos não conseguiu responder a questão por não compreendê-la.
- O aluno D entendeu que as questões 04, 05 e 06, envolviam a translação do gráfico, e explicando por que não as respondeu, escreveu: “Todas possuem o mesmo eixo de simetria; Dificuldade em identificar deslocamentos; as questões 05 e 06 também apresentam o mesmo problema”.

Na questão 05 (08 da atividade experimental), os alunos procederam com descrito a seguir:

- Mais uma vez os alunos que conseguiram responder a questão 04, também responderam a 05, apesar de considerem difíceis, visto não terem sido provocados anteriormente com questões que exigissem deslocamentos (translação ou dinamismo) nas articulações.
- Os demais alunos deixaram a questão sem resposta.

Por fim, vejamos como os alunos procederam ao responder a questão 06 (09 da atividade experimental):

- O aluno A consegue responder os itens a e b e errou os itens c e d.
- Os alunos C, D deixaram a questão sem resposta.
- Os alunos que responderam as questões 04 e 05, mesmo respondendo os itens admitiram muita dificuldade e mesmo assim não usaram a forma canônica.

5.3.2. Atividade 2 (com o aplicativo)

Foram elaboradas oito questões para esta atividade e divididas em dois grupos: o primeiro continha duas que abordavam a passagem da forma geométrica para as formas algébricas, e o segundo, com questões que envolviam a passagem tanto das equações para o gráfico, quanto do gráfico para as equações, visando assim oferecer subsídios para analisarmos as implicações da utilização de um programa computacional nessas articulações, inclusive na identificação de outras dificuldades.

Uma vez que o aplicativo foi elaborado a partir das necessidades indicadas no estudo piloto, acreditamos ter sido possível disponibilizar aos alunos ferramentas que viessem favorecer as articulações entre as formas algébricas e a forma geométrica. À medida que as dificuldades apareciam, os alunos acessavam os dispositivos oferecidos pelo software, que havia sido desenvolvidos para auxiliar no esclarecimento daquela necessidade.

A atividade 1, aplicada anteriormente, constatou exatamente que as dificuldades identificadas inicialmente por um grupo de alunos na primeira fase da pesquisa, também apareceram nesta etapa com a mesma intensidade. Desse modo, submetemos os novos alunos a uma atividade na qual contaram com o aplicativo *Formas,* que muito colaborou na elucidação das dificuldades identificadas.

Para isso elaboramos questões, exigindo que as conversões entre as expressões algébricas e sua respectiva representação geométrica fosse favorecida com a exploração dos coeficientes - unidades simbólicas - das equações, e de alguns pontos do gráfico, denominados aqui de “pontos de controle” - variáveis visuais - sendo estes o vértice e as interseções com os eixos.

VARIÁVEIS VISUAIS	↔	UNIDADES SIMBÓLICAS CORRESPONDENTES
(Forma geométrica - pontos destacados e propriedades) ▪ Interseção (interseções) com o eixo das abscissas. ▪ Interseção com o eixo das ordenadas. ▪ Vértice. ▪ Concavidade e abertura.	↔	(Formas algébricas - coeficientes) ▪ a, b e c - Desenvolvida ▪ a, x' e x'' - Fatorada ▪ a, m e k - Canônica

Quadro 15 - Conversão entre dois registros de representações.

Esse quadro apresenta os elementos da conversão entre as formas algébricas e a forma geométrica. O movimento do gráfico através de alguns pontos possibilitou observar suas implicações nas três formas algébricas, do mesmo modo que as mudanças nas equações proporcionaram visualizar os deslocamentos do gráfico.

FORMAS ALGÉBRICAS ↔	**FORMA GEOMÉTRICA**
DESENVOLVIDA $y=ax^2+bx+c$	• a: concavidade e curvatura. • b: interseção das terminações crescente ou decrescente da parábola com o eixo das ordenadas. • c: interseção com o eixo das ordenadas.
FATORADA $y= a(x-x')(x-x'')$	Esta forma explicita o(s) ponto(s) de interseção com o eixo das abscissas, x' e x'', a concavidade e curvatura da parábola através do coeficiente a.
CANÔNICA $y= a(x-m)^2+k$	Além da concavidade e curvatura, através de a, esta forma destaca as coordenadas do vértice, sendo $x_v=m$ e o $y_v=k$.

Quadro 16 – Conversão entre as formas algébricas e a forma geométrica.

Analisando as informações do quadro anterior, percebemos que a manipulação dos coeficientes - possível com o aplicativo *Formas* - possibilita destacar a funcionalidade de cada uma das formas algébricas, isto é, percebe-se o que cada um pode evidenciar da forma geométrica. Por exemplo, todas as equações, independente da forma, trazem explicitamente o valor de a, tornando possível a determinação da concavidade e curvatura da parábola. Além disso, os alunos observaram que cada expressão algébrica explicita uma característica específica de sua representação geométrica, como a forma desenvolvida que destaca a interseção com o eixo das ordenadas, a fatorada os zeros ou raízes e a canônica as coordenadas do vértice.

Assim sendo, temos em detalhes como cada coeficiente ou unidades simbólicas se relacionam aos aspectos do gráfico ou as variáveis visuais. A articulação dinâmica das unidades simbólicas e das variáveis visuais colaborou para verificação de regularidades na articulação entre as formas algébricas, e principalmente na passagem das equações para o gráfico e do gráfico para as equações.

5.3.2.1. Descrição das questões da atividade com o aplicativo

As duas primeiras questões tratavam da passagem da forma geométrica para as formas algébricas, a primeira consistia em movimentar o gráfico pelos pontos destacados - interseções com os eixos e o vértice - e a segunda, por qualquer outro ponto do gráfico. Desejávamos com isso que os alunos, observando as mudanças ocasionadas nos coeficientes das formas algébricas, desenvolvida, fatorada e canônica, conseguissem perceber a correspondência entre variáveis visuais e as unidades simbólicas, como:

- Qualquer que fosse o ponto movimentado, todas as formas algébricas teriam o mesmo coeficiente *a.*
- A coordenada y do ponto de interseção com o eixo das ordenadas corresponde ao coeficiente c da forma algébrica desenvolvida.
- As coordenadas x dos pontos de interseções com o eixo das abscissas, quando existem, implicam nos valores de x’ e x’’ da forma fatorada.
- As coordenadas x e y do vértice correspondem respectivamente aos coeficientes m e k da forma canônica.

Na segunda questão, ao deslocar o gráfico a partir de outros pontos diferentes das interseções com os eixos cartesianos e do vértice, os estudantes deveriam destacar que a concavidade e a abertura da parábola não seriam alteradas, visto que o valor de *a* não estava sendo mudado.

Agora destacaremos as questões que envolviam simultaneamente a passagem da representação gráfica para as expressões algébricas e das equações para o gráfico. Para isso os alunos poderiam tanto deslocar o gráfico, a partir dos pontos destacados, quanto alterar os coeficientes das formas algébricas explicitadas na área de trabalho do aplicativo.

Nessa perspectiva, a questão 03 exigia que se modificasse o coeficiente *a* na forma desenvolvida, e que fossem registradas as mudanças ocorridas na forma canônica, na forma fatorada e na representação gráfica. Assim, esperávamos que os alunos realizassem as seguintes observações:

<table>
<tr><th>Forma desenvolvida</th><th>Forma fatorada</th><th>Forma canônica</th><th>Forma geométrica</th></tr>
<tr><td>Tomando valores de a > 0.</td><td rowspan="2">As raízes da equação x' e x'' eram modificadas.
Existem os casos onde não há interseções, ou seja, a forma fatorada estará indefinida e só teremos as expressões algébricas na forma desenvolvida e canônica.</td><td rowspan="2">Os valores de m e k não são alterados.</td><td>A parábola apresenta concavidade para cima e sua curvatura diminui à medida que a aumenta.</td></tr>
<tr><td>Para valore de a < 0.</td><td>Concavidade voltada para baixo e a curvatura diminui para valores cada vez menores.</td></tr>
</table>

Quadro 17 – Variações do coeficiente a.

Nas questões 04 e 05 tínhamos a mesma solicitação, modificar os valores de *a,* mas agora na forma fatorada e na forma canônica respectivamente, o aluno deveria perceber a regularidade nos três casos.

Uma vez encerrada a exploração do coeficiente *a*, na questão 06, direcionamos a nossa atenção para as implicações dos coeficientes b e c da forma desenvolvida, esperando que as seguintes observações fossem constatadas:

Forma desenvolvida	Forma fatorada	Forma canônica	Forma geométrica
Variando b (a e c ficarão fixos).	As raízes da equação x' e x'' foram modificadas. Quando b=0, as raízes, caso existam, serão simétricas. Há casos onde não existem interseções, ou seja, a forma fatorada estará indefinida e só teremos as expressões algébricas na forma desenvolvida e canônica.	Os valores de m e k foram alterados. Se b=0, então, m=0 e k=c.	Quando b>0 o ramo crescente da parábola cruza o eixo das ordenadas, no caso de b<0 é o ramo decrescente que intercepta.
Modificando c (com a e b fixos).			O coeficiente c é a coordenada y do ponto de interseção com o eixo das ordenadas.

Quadro 18 – Variações dos coeficientes b e c da forma desenvolvida.

Na questão 07, cuidamos em abordar as implicações ocasionadas nas formas algébricas fatorada e desenvolvida e na forma geométrica, considerando as alterações nos coeficientes m e k da forma canônica, como observamos abaixo.

Forma canônica	Forma desenvolvida	Forma fatorada	Forma geométrica
Variando m (a e k ficarão fixos).	Os coeficientes b e c terão seus valores alterados. Se m=0, então, b=0.	As raízes da equação x' e x'' foram modificadas. Quando m=0, as raízes, caso existam, serão simétricas.	O coeficiente m corresponde à coordenada x do vértice, ou seja, translada o gráfico na horizontal.
Modificando k (com a e m fixos).	Apenas o coeficiente c tem seus valores modificados.	Além das mudanças ocorridas em x' e x'', há casos onde não existem interseções, ou seja, a forma fatorada estará indefinida e só teremos as expressões algébricas na forma desenvolvida e canônica.	O coeficiente k corresponde à coordenada y do vértice, ou seja, translada o gráfico na vertical.

Quadro 19 – Variações de k e m: coeficientes da forma canônica.

Por fim, a última questão tratava da exploração das raízes da equação, explicitadas na forma fatorada, e correspondendo às interseções do gráfico com o eixo das abscissas. Além disso, os alunos deveriam atentar para os casos onde existe apenas uma interseção, ou seja, na forma fatorada aparecerá apenas o valor correspondente a uma raiz, x’ ou x’’.

<table>
<tr><th>Forma fatorada</th><th>Forma desenvolvida</th><th>Forma canônica</th><th>Forma geométrica</th></tr>
<tr><td>Variando x’
(a e x’’ ficarão fixos).</td><td>Os coeficientes b e c terão seus valores alterados.

Se x’=x’’=0, então, b =c=0.</td><td rowspan="2">Os valores de m e k serão alterados.

Quando uma das raízes for igual a zero, k=0 (k será zero) e m será igual a outra raiz diferente de zero.</td><td rowspan="2">x’ e x’’ correspondem às interseções com o eixo das abscissas.

Se uma das raízes for igual a zero haverá apenas uma interseção.

Se x’=x’’=0, então, b=c=0 e o eixo das ordenadas será o eixo de simetria da parábola.</td></tr>
<tr><td>Modificando x’’
(com a e x’ fixos).</td><td>Apenas o coeficiente c é modificado.</td></tr>
</table>

Quadro 20 – Variações das raízes da equação quadrática na forma fatorada.

5.3.2.2. Descrição dos procedimentos dos alunos ao proporem soluções às questões da atividade 2 (com o aplicativo) e das propriedades não destacadas

As duplas foram denominadas de A (Sandra e Anderson), B (Maria e Daniel) e C (Ismar e Antônio) e foram destacadas no início de cada descrição.

Como as duplas procederam na questão 01:

- A, B e C perceberam: Qualquer que fosse o ponto movimentado todas as formas algébricas teriam o mesmo coeficiente a.
- Nenhuma dupla percebeu que a coordenada y do ponto de interseção com o eixo das ordenadas corresponde ao coeficiente c da forma algébrica desenvolvida.
- B e C descreveram que as coordenadas x dos pontos de interseções com o eixo das abscissas, quando existem, implicam nos valores de x' e x'' da foram fatorada.
- B e C observaram: As coordenadas x e y do vértice correspondem respectivamente aos coeficientes m e k da forma canônica.

Na questão 02, as duplas procederam da seguinte maneira:

- A, B e C, descreveram parcialmente que a concavidade e a abertura da parábola não seriam alteradas, visto que o valor de *a* não estava sendo mudado.
- A dupla C, dedicou bastante tempo as questões 1 e 2, possibilitando a compreensão da correspondência entre as variáveis visuais e as unidades simbólicas, que seriam abordadas mais adiantes, nas questões 07 e 08.

A questão 03 proporcionou as seguintes respostas:

- A: Apenas percebeu que os coeficientes mudam e que a abertura da parábola dependia de a.

- B: Respondeu apenas as observações correspondentes a forma geométrica. Esta dupla apenas percebeu que poderia modifica os coeficientes das equações explicitadas na interface do software após ter resolvido esta questão, possivelmente por isso deixou a parte destinadas as equações sem comentários.
- C: Propôs os comentários mais satisfatórios entre as duplas. Apenas esqueceu de mencionar a curvatura da parábola.

Neste caso, nenhuma das duplas demonstrou ter percebido:

- A existência dos casos onde não há interseções, ou seja, a forma fatorada estará indefinida e só teremos as expressões algébricas na forma desenvolvida e canônica.

- Com relação a forma geométrica, que a abertura diminui a medida que o coeficiente a aumenta ($a>0$) e também diminui para valores cada vez menores ($a<0$).

Nas questões 04 e 05, todas as duplas estenderam as observações da questão 03. Desse modo, os aspectos não observados foram os mesmos.

Como as duplas responderam a questão 06:

- A: Fez o registro a partir da movimentação dos coeficientes, mas não escreveu nenhuma consideração a respeito, isto é, não descreveu as regularidades.
- B: Esqueceu de descrever alguns aspectos, como a existência ou não das raízes reais, ou seja, das interseções, mas consegue as demais articulações.
- C: Fez os registros mais consistentes, esquecendo apenas da parte destacada no texto abaixo.

Nenhuma dupla descreveu:

- Com relação a forma fatorada, quando b=0, caso as raízes existam, serão simétricas. Além dos casos onde não existem interseções, ou seja, a equação nesta forma algébrica estará indefinida e só teremos as expressões algébricas na forma desenvolvida e canônica.
- Se o coeficiente b=0 na forma desenvolvida, então, os valores dos coeficientes da forma canônica m=0 e k=c.
- Na forma geométrica, quando b>0 o ramo crescente da parábola cruza o eixo das ordenadas, no caso de b<0 é o ramo decrescente que intercepta.

A questão 07 foi responsável por proporcionar as seguintes respostas:

- A: Realizou os mesmos procedimentos das questões anteriores, destacando a movimentação das unidades simbólicas, mas não enxergando as regularidades.
- B: Descreveu a maioria das regularidades, esquecendo apenas da parte destacada no quadro abaixo.
- C: Por já ter percebido na questão dois a correspondência com a forma geométrica, não detalhou a parte referente às equações. Neste caso, chamou atenção a declaração de um dos alunos, referindo-se a compreensão que obteve acerca da passagem do gráfico para as equações, e vice-versa, a partir das alterações concomitantes realizados no gráfico e nas equações correspondentes, possibilitadas mediante a utilização das ferramentas disponibilizadas no aplicativo Formas: ”Era disso que precisava para ter respondido as questões 4, 5 e 6 da atividade 1”).

Nenhuma dupla evidenciou que na forma canônica, quando m=0, se houver raízes reais, estas serão simétricas, ou seja, x’=x’’ na forma fatorada. Caso não existam raízes reais, a forma fatorada não estará definida.

Já com relação à questão 08, as duplas responderam:

- A: Mesmo procedimento das questões anteriores, destacando a movimentação das unidades simbólicas, mas não explicitando ter percebido as regularidades.
- B: Descreveu a maioria das regularidades, mas quando foi relacioná-las com a representação gráfica, associou as mudanças das raízes ao deslocamento da curva na horizontal e na diagonal e não as interseções com o eixo das abscissas.
- C: Por já ter percebido que as raízes da equação correspondem as coordenadas x, dos pontos de interseção com o eixo das abscissas - questões 01 e 02 - tratou logo de escrever as implicações no gráfico.

Neste caso, as duplas não atentaram para as seguintes ocorrências:

- Se x'=x''=0, então, b =c=0 na forma desenvolvida.
- Quando uma das raízes for igual a zero, k=0 (k será zero) e m será igual a outra raiz diferente de zero, na forma canônica.
- Com relação a representação gráfica, se uma das raízes for igual a zero haverá apenas uma interseção e, se x' =x''=0, então, b=c=0 e o eixo das ordenadas será o eixo de simetria da parábola.

5.3.2.3. Análise dos procedimentos dos alunos

Ao receberem a atividade, os alunos foram orientados a utilizarem o aplicativo Formas como ferramenta computacional para auxiliar na realização da mesma. A aplicação durou cerca de duas horas e os alunos a consideraram extensa - a primeira questão, por exemplo, exigiu muita atenção, muitas observações e empenho - e sugeriram que a atividade poderia ter sido divida em duas partes. Mesmo assim, percebemos bastante envolvimento entre os alunos e muita dedicação na execução das questões e anotações das resoluções propostas.

Na análise dos protocolos denominamos as duplas de A (Sandra e Anderson), B (Maria e Daniel) e C (Ismar e Antônio).

As questões 1 e 2 tratavam da passagem da forma geométrica para as formas algébricas e propunham problemas que requeriam dos alunos a articulação da representação gráfica com as expressões algébricas, centrada numa apresentação explicita e sistemática das variáveis visuais significativas, permitindo encontrar diretamente a expressão algébrica de propriedades geométricas.

As duplas B e C conseguiram atingir os objetivos destas questões, o que ficou evidenciado nos seus procedimentos. Com destaque para a dupla C, que assim como a B, dedicou bastante tempo às questões 1 e 2, mas embora a questão exigisse apenas a passagem da forma geométrica para as formas algébricas, os integrantes desta dupla também exploraram, já nestas questões, a passagem contrária. Isso permitiu que eles compreendessem a correspondência entre as variáveis visuais e as unidades simbólicas, que seriam abordadas mais adiante, nas questões 07 e 08.

Com respeito à dupla A, cuidou apenas em registrar os movimentos do gráfico e as variações dos coeficientes, se aumentavam ou diminuíam os valores e seus correspondentes nas outras equações, não conseguindo fazer qualquer reflexão ou constatação de regularidades. Um fato que chamou atenção foi que esta dupla estendeu os coeficientes a, b e c da forma desenvolvida para as demais, ficando a fatorada $y=a(x-b)(x-c)$ e a canônica $y=a(x-b)^2-c$, isso revela a forte influência do destaque que é dado à forma desenvolvida nas abordagens dos livros didáticos e nas salas de aula.

As demais questões (3 a 8) envolviam simultaneamente a passagem da representação gráfica para as expressões algébricas e destas para o gráfico. Exigiam a exploração das três expressões algébricas com a mesma representação gráfica, e vice-versa, de maneira que pudessem proporcionar ao estudante perceber a correspondência entre as unidades simbólicas das formas algébricas e os valores visuais da forma geométrica.

A postura da dupla A (Sandra e Anderson) manteve-se a mesma em toda a atividade, sendo inclusive a primeira a terminar a atividade, apresentando no geral um desempenho comprometedor, não conseguindo compreender o caráter da atividade com o aplicativo, que era buscar regularidades nas articulações entre as formas, restringiram-se apenas a observações superficiais acerca da movimentação dos pontos do gráfico e dos coeficientes das equações, se aumentavam ou diminuíam. Não é de admirar que os alunos que compunham essa dupla declararam ao termino desta atividade, não sentirem necessidade de mudarem seus procedimentos apresentados anteriormente como o reconhecimento exclusivo da forma desenvolvida, a utilização do processo ponto a ponto e a questão do deslocamento ou translação dos gráficos. Assim como nas duas primeiras questões, essa dupla não descreveu nem demonstrou ter percebido algumas das propriedades, como por exemplo, a correspondência entre as raízes da equação quadrática com a forma fatorada e a interseção do gráfico com o eixo das abscissas, ou então, a forma canônica e as coordenadas do vértice, relativas a articulação dos registros algébricos e gráfico.

Notamos também que as duplas A e B estenderam as notações relativas aos coeficientes da forma algébrica desenvolvida b e c as demais equações. De fato o a é comum a todas, mas as questões 7 e 8 destacavam o x’ e x’’ na forma fatorada e o m e k da forma canônica respectivamente, o que foi percebida pelas duplas. Mas somente a B fez as devidas correções. Percebemos que isso devesse a demasiada evidência atribuída a forma desenvolvida pelos livros didáticos e abordagens em sala de aula pelos professores.

No caso da dupla B (Maria e Daniel) o destaque se deu pelo muito tempo dedicado a primeira questão. Foi possível perceber a interação dos alunos na busca por uma apreensão global e qualitativa do gráfico na sua articulação com as equações. Isso possibilitou descreverem a maioria das regularidades, apesar de não ter apercebido algumas propriedades como, por exemplo, a existência ou não das raízes reais, ou seja, das interseções com o eixo das abscissas, como conseqüência, na questão 08 descreveu a maioria das propriedades, mas quando foi relacioná-las com a representação gráfica, associou as mudanças das raízes ao deslocamento da curva na horizontal e na diagonal.

Esta dupla se ateve tanto a articulação a partir do gráfico, que apenas percebeu que poderia modificar os coeficientes das equações explicitadas na interface do software, após ter resolvido a questão 03, possivelmente por isso não descreveu o que ocorria com as equações quando alterávamos o coeficiente a.

Já a dupla C (Ismar e Antônio) foi a que melhor interagiu com o aplicativo promovendo os comentários mais satisfatórios desde a primeira questão, inclusive percebendo as propriedades pertinentes as articulações das equações para o gráfico, e vice-versa. Apesar das dificuldades evidenciadas na atividade 1, um dos integrantes deixou metade das questões sem respostas. Também foram os primeiro a perceberem que o software possibilitava realizar modificações tanto no gráfico como nas equações. Vale lembrar que a movimentação a partir do gráfico foi a primeira a ser executada por exigência das questões 1 e 2, as demais funções do aplicativo seriam indicadas a partir da terceira. Mesmo assim, também deixou de perceber algumas propriedades como aquela relacionada a abertura da parábola, que está associada ao valor do coeficiente a.

Neste caso, chamou atenção a declaração de um dos alunos, referindo-se a compreensão que obteve acerca da passagem do gráfico para as equações, e vice-versa, a partir das alterações concomitantes realizados no gráfico e nas equações correspondentes, possibilitadas mediante a utilização das ferramentas disponibilizadas no aplicativo Formas: ”Era disso que precisava para ter respondido as questões 4, 5 e 6 da atividade 1”.

De modo geral, as duplas B e C, conseguiram explorar os instrumentos disponibilizados no aplicativo observando as propriedades relacionadas na articulação entre as equações e o gráfico, e do gráfico para as equações, refletindo sobre o procedimento adotado na resolução das questões da atividade 1. Já a dupla A, não percebeu as articulações entre as formas, haja vista, ter anotado apenas o os movimentos do gráfico e as variações dos valores dos coeficientes.

Após o término da atividade com o aplicativo, os alunos foram questionados acerca das contribuições da utilização do programa Formas considerando seus procedimentos adotados nas resoluções da atividade 2, comparados com os da atividade 1. Foi-lhes perguntado: em que o aplicativo colaborou para a identificação e o esclarecimento das dificuldades manifestadas na atividade anterior? Dos seis alunos participantes desta etapa, quatro deles (integrantes das duplas B e C) declararam que repensariam seus procedimentos, visto terem percebido os tipos de dificuldades relacionados aos seguintes aspectos:

- Usar apenas a forma desenvolvida; agora passariam a usar as equações nas formas fatorada e canônica, pois cada uma delas estaria relacionada as variáveis visuais, como a interseção com o eixo das abscissas e coordenadas do vértice respectivamente, além da concavidade e da abertura destacadas em ambas.

- Entender os movimentos de translações do gráfico associados às mudanças nas formas algébricas desenvolvida, fatorada e canônica. Esta compreensão implicaria na mudança de postura dos alunos com relação às questões 04, 05 e 06, que envolviam deslocamentos dos gráficos, e havia sido a causa da maioria das dificuldades evidenciadas nas atividades anteriores.

Além das observações já destacadas, seguem outras também evidenciadas:

- O aluno Ismar, integrante da dupla C, destacou a condição para movimentar o gráfico paralelamente as alterações das equações.

- Para Maria, Daniel (dupla B) e Antônio (dupla C), o fato mais relevante foi reconhecer outras formas algébricas (fatorada e canônica) articuladas a mesma representação geométrica;

- Percebemos que a primeira questão exigia muita atenção e análise dos alunos, tanto que as duplas que mais dedicaram tempo a ela, apresentaram os melhores resultados. Caso das duplas B e C.

Ao analisar as anotações dos alunos, notamos também que para cada questão houve propriedades não constatadas por todas as duplas, como podemos observar no quadro abaixo:

<table>
<tr><th rowspan="3">QUESTÕES</th><th colspan="2">PROPRIEDADES NÃO EVIDENCIADAS</th></tr>
<tr><th>FORMAS ALGÉBRICAS:
DESENVOLVIDA, FATORADA E CANÔNICA.</th><th>FORMA GEOMÉTRICA</th></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>01</td><td colspan="2">Perceber que a coordenada y do ponto de interseção com o eixo das ordenadas corresponde ao coeficiente c da forma algébrica desenvolvida.</td></tr>
<tr><td>03</td><td colspan="2">▪ A existência dos casos onde não há interseções com o eixo das abscissas, ou seja, a forma fatorada estará indefinida e só teremos as expressões algébricas na forma desenvolvida e canônica.
▪ Com relação à forma geométrica: a curvatura diminui à medida que o coeficiente a aumenta $(a>0)$ e também diminui para valores cada vez menores $(a<0)$.

Obs.: Nas questões 04 e 05, todas as duplas estenderam as regularidades observadas na questão 03.</td></tr>
<tr><td>06</td><td>▪ Com relação à forma fatorada, quando b=0, caso as raízes existam, serão simétricas, x’=x’’. Além dos casos onde não existem interseções com o eixo das abscissas, ou seja, a equação nesta forma algébrica estará indefinida e só teremos as expressões algébricas na forma desenvolvida e canônica.
▪ Se o coeficiente b=0 na forma desenvolvida, então, os valores dos coeficientes da forma canônica serão m=0 e k=c.</td><td>Na forma geométrica, quando $b>0$ o ramo crescente da parábola cruza o eixo das ordenadas, no caso de $b<0$ é o ramo decrescente que intercepta.</td></tr>
<tr><td>07</td><td>Considerando a forma canônica, quando m=0, se houver raízes reais, estas serão simétricas, ou seja, x’=x’’ na forma fatorada. Caso não existam raízes reais, a forma fatorada não estará definida.</td><td>Não há interseção com o eixo das abscissas.</td></tr>
<tr><td>08</td><td>▪ Se x’=x’’=0, então, b = c = 0 na forma desenvolvida;
▪ Quando uma das raízes for igual a zero, k=0 (k será zero) e m será igual a outra raiz diferente de zero, na forma canônica.</td><td>Se uma das raízes for igual a zero haverá apenas uma interseção com o eixo das abscissas e, se x’=x’’=0, então, b=c=0 e o eixo das ordenadas será o eixo de simetria da parábola.</td></tr>
</table>

Quadro 21 - Propriedades não reconhecidas

A elaboração de uma atividade envolvendo problemas abertos, para se aplicada como complemento da atividade 2 em pelo menos mais dois encontros, nos parece bastante relevante, visto que os alunos não conseguiram realizar algumas observações importantes, como destacamos no quadro anterior, e pela dificuldade que tiveram em articular várias variáveis ao mesmo tempo. Por exemplo, ficou muito vago pedir na primeira questão para observar o que ocorria com as três equações a partir da movimentação do vértice, talvez se elaborássemos um problema cujas soluções exigissem a compreensão ou entendimento de determinadas regularidades levasse os alunos a focarem melhor suas observações.

Uma nova atividade com problemas abertos para ser aplicada com o programa *Formas*, teria também como propósito fazer com que os alunos percebessem os aspectos não evidenciados na articulação entre os registros algébricos e o registro gráfico durante a atividade 1, que estão associados a possíveis dificuldades, como a existência de raízes duplas - uma só interseção do gráfico com o eixo das abscissas - e raízes não reais - quando não há interseções, tem persistido deste o piloto, e não foi esclarecido na atividade 2.

6. CONSIDERAÇÕES

Ao considerarmos em nossos estudos prévios as dificuldades apontadas na articulação entre formas algébricas e forma geométrica, principalmente quando o foco é a passagem do gráfico para as equações, decidimos então investigar, através da identificação e compreensão dessas dificuldades, e buscar simultaneamente definir e desenvolver uma ferramenta computacional que fosse capaz de favorecer a articulação entre equações e o gráfico, para desse modo elucidar tais dificuldades.

Para buscarmos respostas a essas indagações, desenvolvemos nossa pesquisa centrada *na teoria dos registros de representações semióticas de Duval (1995)* e nas idéias da *Transposição Informática de Balacheff (1993)*. Inicialmente, identificamos algumas dificuldades, tomando por base as observações de sala e os procedimentos dos alunos ao proporem soluções às questões de uma atividade experimental. Dessa maneira, pretendíamos identificar elementos que viessem estruturar nossa análise das dificuldades, visando desenvolver uma ferramenta computacional e novas atividades a partir das necessidades apontadas na primeira fase referentes à articulação entre o gráfico e as equações.

A seguir, descreveremos algumas considerações acerca dos procedimentos e resultados obtidos a partir da análise dos registros dos alunos.

Inicialmente, tomando por base o trabalho de Duval (1988) e Maia (2007), conseguimos a organização das unidades simbólicas correspondentes às variáveis visuais para a forma fatorada e desenvolvida - a canônica já havia sido elaborada por Maia (2007) - sendo extremamente necessária a elaboração das atividades e a definição e desenvolvimento do aplicativo, visto ter-se explicitado e ampliado a correspondência entre os coeficientes e os aspectos visuais do gráfico - como as interseções com os eixos e o vértice - ou seja, enquanto uma equação explicitava determinadas variáveis, outras não; desse modo, uma complementaria a outra.

A investigação das dificuldades levou-nos a classificá-las em quatro tipos, identificadas inicialmente no piloto e novamente evidenciados na atividade 1 da segunda fase. Sua análise proporcionou as seguintes considerações:

- O procedimento ponto a ponto, já ressaltado por Duval (1988), pode constituir-se um obstáculo à passagem de um gráfico a sua equação, visto está centrado sobre valores particulares, tomados um a um.

- Em geral, o enfoque dado a uma única forma algébrica, que neste caso é a desenvolvida, limita as possibilidades de ampliação do conceito de equação quadrática, dificultando o reconhecimento das outras formas algébricas de mesma representação gráfica.

- A dificuldade relacionada às situações nas quais o gráfico não interceptava o eixo das abscissas - não existem raízes reais - ou possui apenas uma interseção - uma raiz real - se dá muitas vezes por desconhecerem as outras expressões algébricas da equação quadrática, visto os procedimentos tomando por base a forma desenvolvida ser muita restritiva.

- Todos os tipos de dificuldades identificadas aparecem relacionados à necessidade de tratamento dinâmico do gráfico, principalmente as situações que envolviam gráficos transladados na passagem para as equações.

O fato dos mesmos tipos de dificuldades surgirem, independente da escola à qual pertença o grupo de alunos, implica a necessidade de repensarmos as maneiras propostas de se trabalhar com temas envolvendo a articulação entre formas algébricas e a forma geométrica. Essa revisão possivelmente, deve ocorrer nos livros didáticos, na postura dos professores, na elaboração de seqüências de ensino e na criação e utilização de ferramentas computacionais que venham favorecer essa articulação.

Os estudos da primeira fase levaram-nos à elaboração de mais duas atividades e à definição e desenvolvimento de um aplicativo para colaborar na compreensão (elucidação) das dificuldades e na articulação dos dois registros.

Um dos resultados bastante significativo desta pesquisa foi a definição e o desenvolvimento do aplicativo *Formas*, elaborado a partir das necessidades indicadas no estudo piloto. Este oferece a possibilidade de realizar deslocamentos no gráfico e de modificação nas formas algébricas, favorecido pelo princípio de manipulação direta destes objetos implantado na interface, e permite o acesso rápido e contínuo a muitas situações, constituindo-se numa ferramenta rica na promoção da articulação entre as formas algébrica e geométrica.

Vale lembrar que na atividade 2 (realizada por três duplas), os alunos deveriam perceber a eficiência do programa em favorecer a articulação entre as expressões algébricas e a representação gráfica, a partir de uma apreensão global qualitativa, destacando as variáveis visuais e as unidades simbólicas correspondentes.

A esse respeito segue algumas observações acerca da eficiência do aplicativo com respeito ao que se propôs:

- Notamos que, influenciados pelo destaque que é dado a forma desenvolvida nos livros didáticos e nas salas de aulas, a maioria dos alunos estenderam as notações relativas aos coeficientes da forma algébrica desenvolvida b e c às demais equações, ficando a fatorada $y=a(x-b)(x-c)$ e a canônica $y=a(x-b)^2-c$. De fato, o a é comum a todas, mas as questões 7 e 8 destacavam o x' e x'' na forma fatorada e o m e k da forma canônica respectivamente, o que foi percebido posteriormente.

- A declaração de um dos alunos referindo-se às dificuldades enfrentadas na atividade 1, após ter percebido as propriedades evidenciadas da articulação entre as formas na atividade 2, reflete bem a eficiência do aplicativo como ferramenta na conversão entre o gráfico e as equações: "Era disso que precisava para ter respondido as questões 4, 5 e 6 da atividade 1".

- Quando questionados acerca das contribuições da utilização do aplicativo *Formas,* considerando seus procedimentos adotados nas resoluções da atividade 2, comparados com os da atividade 1, quatro dos seis alunos participantes desta etapa declararam que repensariam seus procedimentos, visto terem identificado as dificuldades[29] e compreendidos suas causas.

Ao mesmo tempo em que conseguimos responder nossas questões de pesquisa e alcançar nossos objetivos, percebemos a necessidade de novos estudos como destacaremos em seguida.

Diante dos fatos relacionados à maneira como se dá a conversão entre formas algébricas e forma geométrica, nos níveis de ensino, sua abordagem não reflete o processo histórico que levou a unificação entre a álgebra e a geometria. Vista de maneira fragmentada, a conversão entre esses dois registros tem sido tratada como sendo trivial. Todavia vários estudos têm demonstrado que isso não corresponde à realidade, uma vez que os alunos não compreendem bem essa conversão, mesmo estando na fase final do ensino médio.

Desse modo, tendo em vista a potencialidade do aplicativo *Formas,* seria interessante se ferramentas como estas pudessem ser desenvolvidas e integradas aos métodos de ensino presentes nas salas de aulas, contribuindo assim para a efetiva articulação entre álgebra e geometria. Haja vista as limitações dos livros didáticos e de alguns softwares disponibilizados, que muitas vezes não se ajustam às necessidades específicas à exploração que se deseja dos gráficos e das equações. Assim nos deparamos com um novo questionamento: como implementar essas propostas em situações de ensino? Seria viável? Cabe a nós pensarmos em possíveis soluções.

Ressaltamos também que o desenvolvimento do aplicativo *Formas* foi um resultado importante, não apenas pela tecnologia produzida que efetivamente ajuda na exploração dinâmica de equações e gráficos, tendo em vista suas conversões, mas também pelo princípio adotado no sentido de utilizar as reflexões didáticas na definição especifica de uma tecnologia, quando com freqüência o processo é o oposto. Isto é, constrói-se um quadro teórico e uma metodologia em função de ferramentas computacionais já existentes.

[29] Estas dificuldades correspondem aos quatro tipos descritos anteriormente.

Em nosso caso, buscamos "integrar"[30] as representações semióticas, no sentido de Duval (2005), as ideias da Transposição Informática de Balacheff (1993) no desenvolvemos do aplicativo, tomando por base as necessidades de articular concomitantemente equações e gráfico, considerando uma apreensão global e evidenciando as variáveis visuais correspondentes às unidades simbólicas. Novamente nos deparamos com outra indagação: seria possível em programas de pós-graduação em ensino das ciências ou educação matemática, o desenvolvimento de softwares ad hoc, em pesquisas envolvendo a conversão entre os registros algébricos e gráficos, relacionados a outros temas das geometrias algébricas e analíticas? Quais as implicações para a produção do conhecimento científico? E para o cotidiano escolar? Esses questionamentos parecem apontar a necessidade de mais estudos nessa perspectiva.

Outro aspecto que gostaríamos de destacar diz respeito à importância da articulação entre álgebra e geometria na evolução dos conhecimentos matemáticos, sendo construída progressivamente, inclusive dando origem a novas áreas de estudo da matemática como, a geometria-algébrica e a álgebra-geométrica. Atualmente, no ensino de matemática, essa articulação é considerada como sendo algo natural, segundo as abordagens dos livros didáticos e os professores. Mas, como observamos nessa e em outras pesquisas, não é para os alunos, visto que a articulação é trabalhada em casos bem específicos, partindo-se do cálculo das coordenadas pelo procedimento ponto a ponto para traçar o gráfico. Consideramos que nossa ideia de trabalhar com as formas e com as meta-propriedades das formas algébricas e propriedades geométricas associadas, é um caminho para trabalhar efetivamente a articulação entre álgebra e geometria.

Desse modo, ressaltamos a necessidade de um trabalho mais especifico e aprofundado sobre a articulação álgebra-geometria no ensino da matemática, talvez como as formas (algébricas e geométricas) aparecem nos trabalhos de Descartes e outros matemáticos que desenvolveram as geometrias algébricas e analíticas e a álgebra-geométrica.

[30] Os quadros elaborados com base nos trabalhos de Duval (1988) e Maia (2007), contribuíram para a definição do aplicativo, cujo desenvolvimento está fundamentado na Transposição Informática de Balacheff (1993).

REFERÊNCIAS

BALACHEFF, N. Contribuition de la didactique et de l'epistemologie aux recherches em EIAO. In : **Actes des XIIIº jounées francophones de l'informatique.** IMAG-CNRS. Grenoble : Editora C. Bellisant, 1991.

BALACHEFF, N. **Cours de DEA EIAH**, Grenoble, 1999-2000, www-didactique.imag.fr/CoursEIAH/index.html, 1999.

BALACHEFF, N. **La transposition informatique**. In: ARTIGUE et al. (eds.). 20 ans de didactique des mathématiques en France. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1993.

BALACHEFF, N., BELLEMAIN, F. **Conhecimento, a pedra angular do design de TEL.** Tópicos Educacionais, Volume 17 n°1-3, CE-UFPE, Recife, 2007.

BELLEMAIN, F. **A transposição informática na engenharia de softwares educativos**. I SIPEM, 22 a 25 de novembro, Serra Negra (SP), 2000, p 1- 6.

BELLEMAIN, F. **Geometria Dinâmica: diferentes implementações, papel da manipulação direta e usos na aprendizagem.** In: International Conference on Graphics Engineering for Arts and Design. 4. 2001, São Paulo: **Anais** USP, 2001. p. 1314-1329.

BELLEMAIN, F. **Reconhecimento de formas algébricas no ensino.** II HTEM. Rio de Janeiro: IME-UERJ, 2004.

BELLEMAIN, F. G. R.; BELLEMAIN, P. M. B.; FERREIRA, V. G. G.. Simulação no ensino da matemática: Um exemplo com Cabri-Géomètre para abordar os conceitos de área e perímetro. In: SIPEM - **Seminário Internacional de Pesquisas em Educação Matemática.** 2006, Águas de Lindóia. Anais do III SIPEM, V. único. Recife: SBEM, 2006

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2ª ed. 3ª reimpressão. Trad. GOMIDE, E. F. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 2001.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio, V2 . Ciências da Natureza Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: Ministério da Educação, 2006.

CHEVALLARD, Y. Le passage de l'arithmétique a l'algebre dans l'enseignement des mathématiques au collège. **Journal Pour Les Enseignants de Mathematique et de Sciences Physiques du Premier Cycle de L'enseignement Secondaire**, Deuxième partie, Petit x, n°19. Grenoble:Edité par I'I.R.E.M.,1989, p. 43 – 72.

CHEVALLARD, Y. **La Transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné**. Grenoble: La pensée sauvag éditions, 1985.

D'AMORE, B. **Elementos de didática da matemática.** 1ª Edição. Trad. BONOMI, M. C. São Paulo : Editora da Física, 2007, p. 99.

DUVAL, R. **Aprendizagens intelectuais**. Cadrno do curso ministrado na PUC-SP, Fevereiro/1999.

DUVAL, R., **Graphiques et Equations** : L'articulation de deux registres, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. 1º IREM de Strasbourg, 1988. p 235-253.

DUVAL, R., Registros de Representações Semióticas e o Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: Machado, S. D. A. (Org.), **Aprendizagem em Matemática Registros de Representações Semióticas.** Campinas - SP; Papirus, 2005, p. 7-33.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.** Berne, Suisse: Peter Lang, 1995. p. 400.

FRANÇA, M. V. D. **Conceitos fundamentais de álgebra linear: uma abordagem integrando geometria dinâmica**. 2007. 140 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, PUC-SP, São Paulo, 2007.

GARBI, G. G. **O Romance das equações algébricas**. 2ª ed. rev. e ampl., São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007. p. 79 e 80.

GOMES FERREIRA, V. G. **Exploring Mathematical Functions Through Dynamic Microworlds**. 1997, 353 F. Tese. Institute Education, Universidade de Londres. Londres, 1997.

GUELLI, O. **Contando a História da Matemática. História da equação do 2º grau.** V3. 10ª ed. São Paulo: Editora Ática, 2002, p. 30 – 32.

KARRER, M. **Articulação entre álgebra linear e geometria: um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica.** 2006. 435 f. Tese de doutorado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

KIERAN, C. The learning and teaching of school Álgebra. in GROWS, D. **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. Project of the N. C.T.M., 1992, pp. 390-419.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. V1. 5 ed. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2001, p 114-135.

LOPES, W. S., **A importância da utilização de múltiplas representações no desenvolvimento do conceito de função: uma proposta de ensino.** 2003. 106f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, PUC-SP, São Paulo, 2003.

MAIA, D. **Função Quadrática: Um Estudo Didático de uma Abordagem Computacional.** 2007. 141 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, PUC-SP, São Paulo, 2007.

OLIVEIRA, N. **Conceito de Função: Uma abordagem do processo ensino-aprendizagem.** 1997. 174 f Dissertação (Mestrado) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, PUC-SP, São Paulo, 1997.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Base Curricular Comum para as Redes Públicas de Ensino de Pernambuco: Matemática.** Recife: Secretaria de Educação, 2008.

SANTAELLA, L. **O que é semiótica**. Coleção Primeiros Passos. São Paulo: Brasiliense, 1983, p.13.

SANTOS, E. P., **Função afim y=ax+b: A articulação entre os registros gráfico e algébrico com o auxílio de um software educativo.** 2002. 120 f Dissertação (Mestrado) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, PUC-SP, São Paulo, 2002.

SILVA, B. A. et all, Uma ruptura do contrato didático no estudo de comportamento de funções. **Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática**, São Paulo, n. 11A Edição Especial, p. 73-77, abril 2002.

SIMÕES, M. H. P., **Uma sequência para o ensino/aprendizagem de função quadrática.** 1995. 259f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1995.

SCHWARZ, O. **Sobre as concepções de função dos alunos ao término do 2º grau.** 1995. 161f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1995.

SOUZA, T. A. **Calculadoras Gráficas: Uma Proposta Didático-Pedagógica para o Tema Funções Quadráticas.** 221f. (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática) UNESP, Rio Claro – SP, 1996.

APÊNDICE A - ATIVIDADE PRELIMINAR

Nome: **Série:** **Data:**

1) Qual(is) equação(equações) corresponde(m) a curva abaixo?

i) $y=(x-2)^2-1$

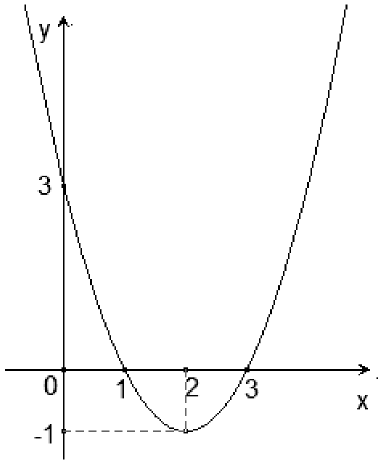
ii) $y=(x-1)(x-3)$

iii) $y=x^2-4x+3$

iv) $y=2x^2-4x+3$

v) $y=2(x-1)(x+3)$

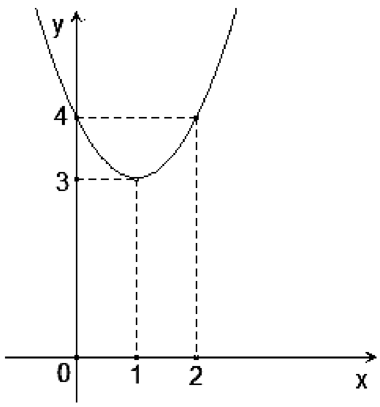
vi) $y=(x-1)^2+2$



CÁLCULOS E ANOTAÇÕES:

2) Complete as equações a seguir a partir dos dados evidenciados nas suas respectivas representações geométricas:

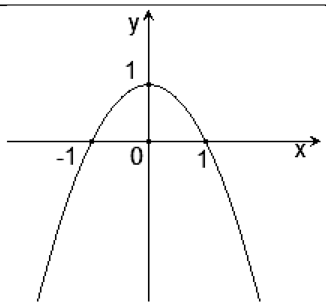
a)



- $y = \ldots(x-\ldots)^2 + \ldots$
- $y = \ldots x^2 + \ldots x + \ldots$

CÁLCULOS E ANOTAÇÕES:

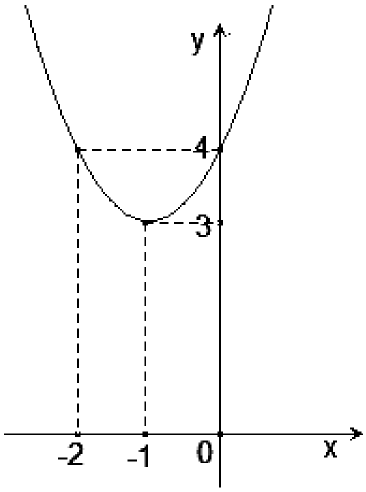
b)



- $y = \ldots(x-\ldots)^2 + \ldots$
- $y = \ldots\cdot(x-\ldots)\cdot(x-\ldots)$
- $y = \ldots x^2 + \ldots x + \ldots$

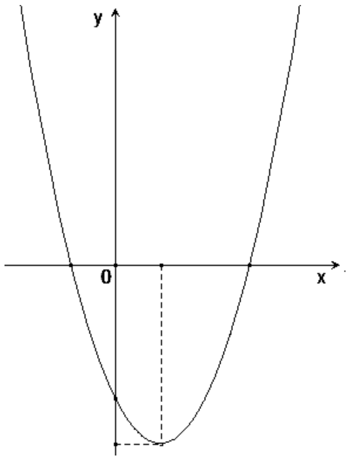
CÁLCULOS E ANOTAÇÕES:

c)

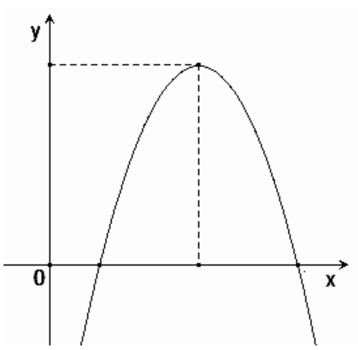
 ▪ $y = \ldots(x-\ldots)^2 + \ldots$ ▪ $y = \ldots x^2 + \ldots x + \ldots$	CÁLCULOS E ANOTAÇÕES:

3) Encontre as coordenadas do vértice e as intersecções com os eixos das ordenadas e das abscissas, quando existir (existirem), dos gráficos a partir das equações dadas.

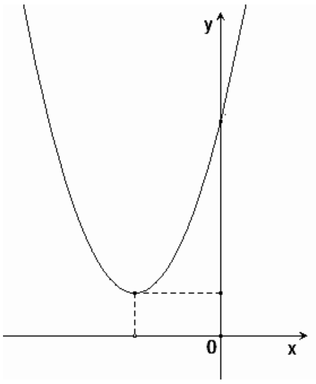
a)

	CÁLCULOS E ANOTAÇÕES:
 ▪ $y=x^2-2x-3$ ▪ $y=(x-1)^2-4$ ▪ $y=(x+1)(x-3)$	

b)

	CÁLCULOS E ANOTAÇÕES:
 ▪ $y=-(x-3)^2+4$ ▪ $y=-(x-1)\cdot(x-5)$ ▪ $y= -x^2+6x-5$	

c)

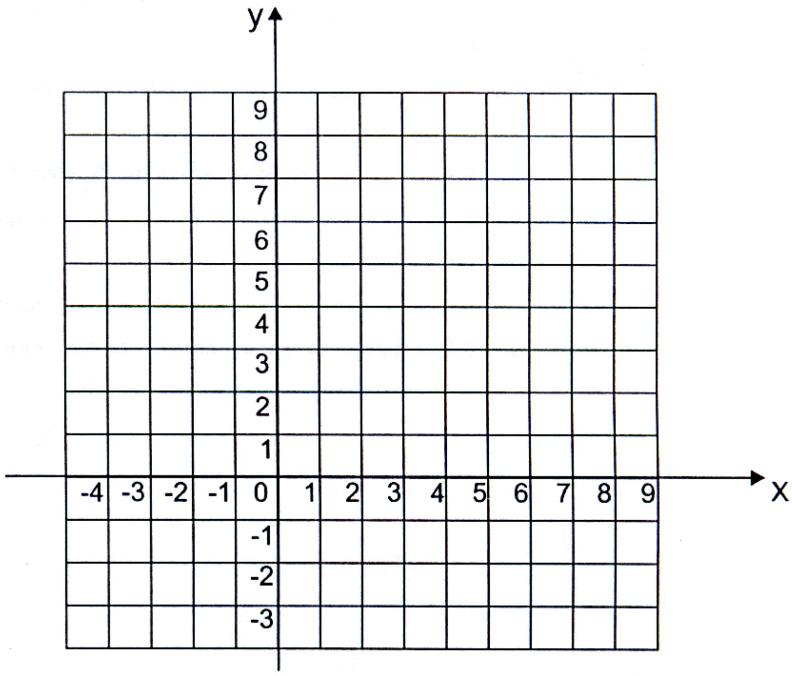
 ▪ $y=(x+2)^2+1$ ▪ $y=\ x^2+4x+5$	CÁLCULOS E ANOTAÇÕES:

4) Para cada uma das equações a seguir esboce seu gráfico correspondente utilizando alguns pontos que você consegue determinar.

a) $y=2x^2-10x+12$

$y=2(x-2)(x-3)$

$$y=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$$

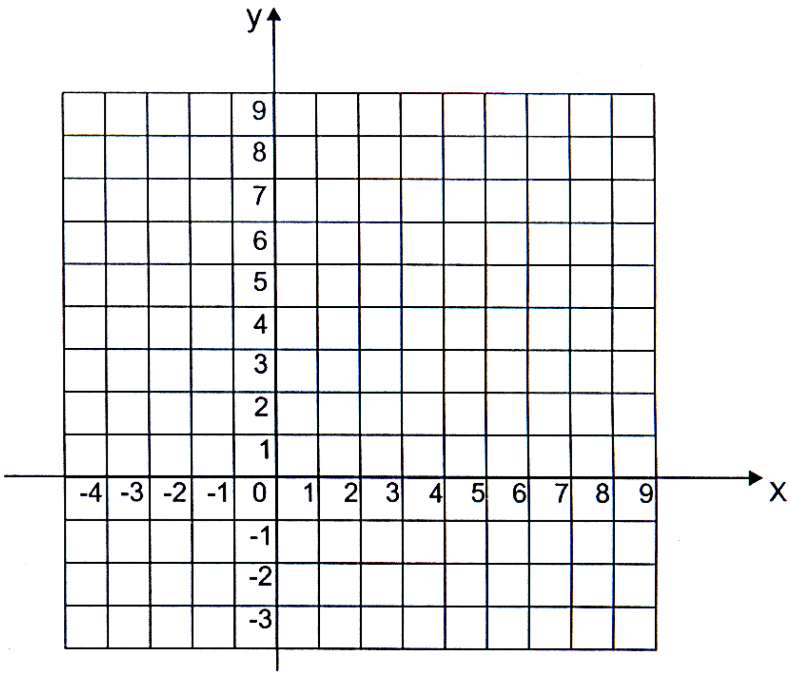


CÁLCULOS E ANOTAÇÕES:

b) $y = (x+2)^2 - 1$

$y = (x+1)(x+3)$

$y = x^2 + 4x + 3$

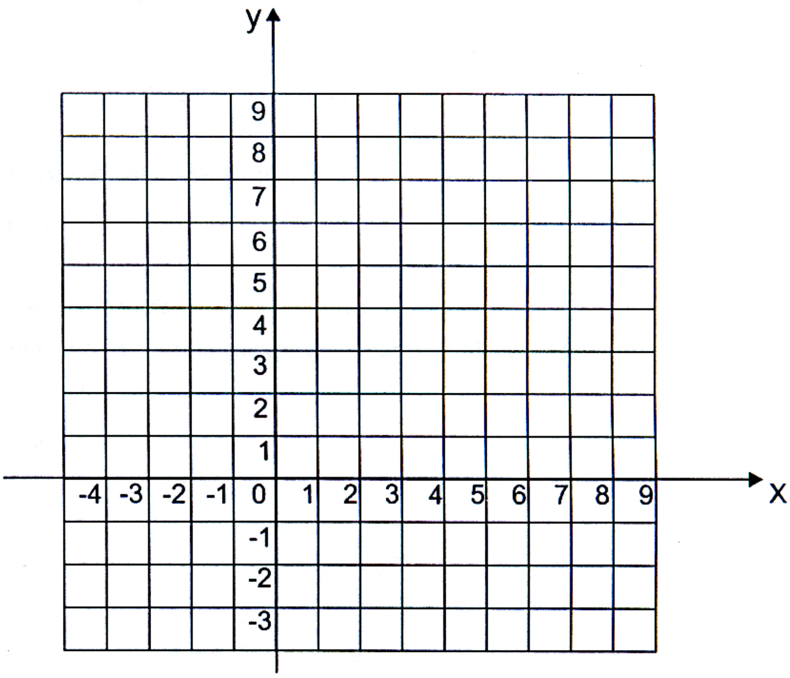


CÁLCULOS E ANOTAÇÕES:

c) $y = (x + 4 - \sqrt{10})(x + 4 + \sqrt{10})$

$y = x^2 + 8x + 6$

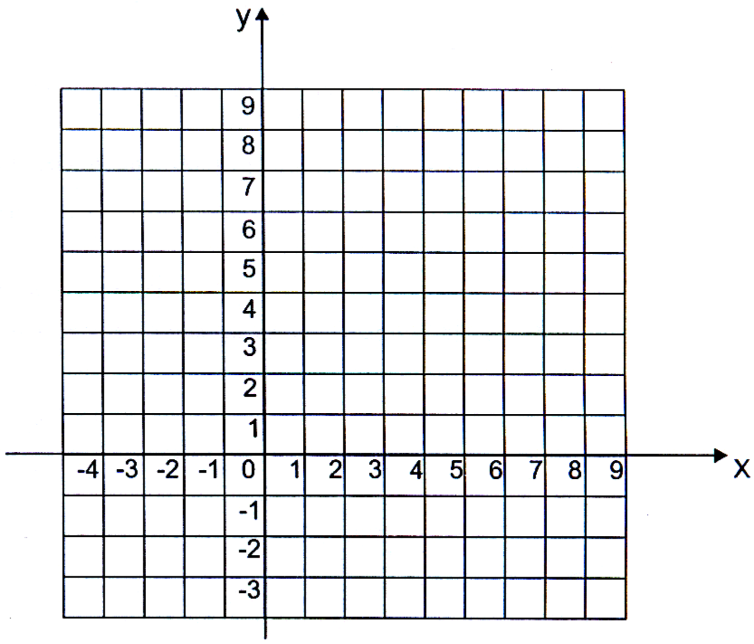
$y = (x + 4)^2 - 10$



CÁLCULOS E ANOTAÇÕES:

5) Esboce, num mesmo sistema coordenado, as curvas das seguintes equações definidas em R.

$y=x^2$ $y=x^2+2$ $y=x^2-2$



Agora responda:

a) Quais as coordenas dos vértices dessas curvas?

CÁLCULOS E ANOTAÇÕES:

b) As parábolas estão voltadas para cima ou para baixo? Por que?

CÁLCULOS E ANOTAÇÕES:

c) Todas as parábolas que você esboçou possuem o mesmo eixo de simetria? Caso afirmativo, qual é esse eixo?

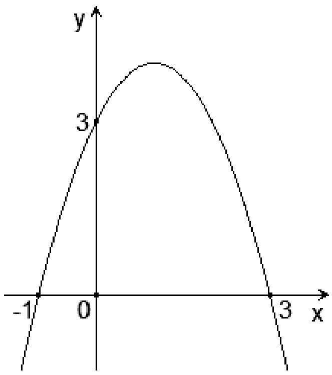
CÁLCULOS E ANOTAÇÕES:

d) Como você pode obter os gráficos de $y=x^2+2$ e $y=x^2-2$ conhecendo o gráfico de $y=x^2$?

CÁLCULOS E ANOTAÇÕES:

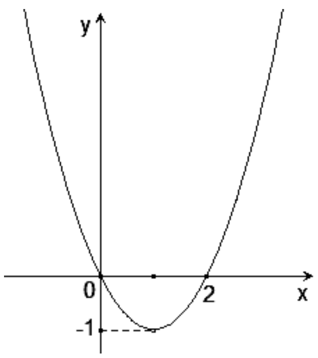
6) Determine pelo menos uma equação para cada curva representada a seguir:

a)



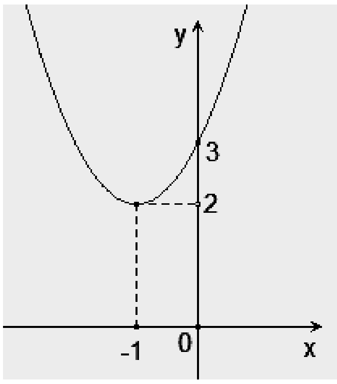
CÁLCULOS E ANOTAÇÕES:

b)

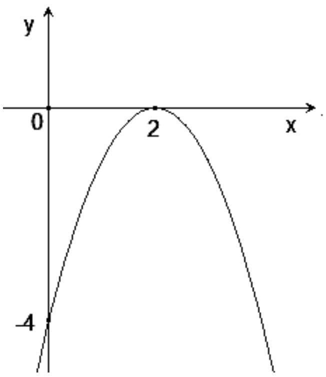


CÁLCULOS E ANOTAÇÕES:

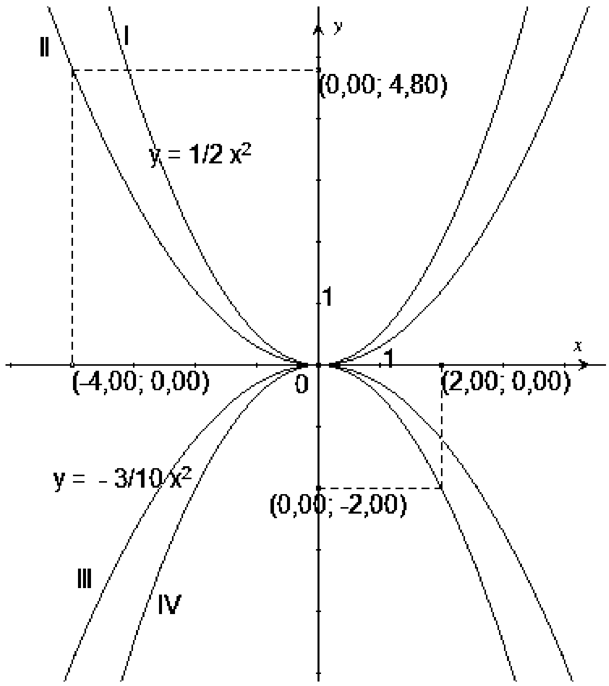
c)

	CÁLCULOS E ANOTAÇÕES:

d)

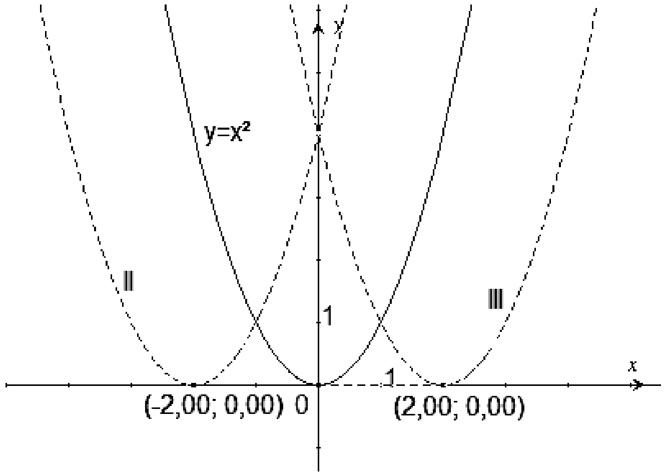
	CÁLCULOS E ANOTAÇÕES:

7) Determine as equações das curvas II e IV analisando as curvas I e II.



CÁLCULOS E ANOTAÇÕES:

8) Observe as representações gráficas e encontre suas equações (gráficos II e III, com coordenadas dos vértices respectivamente (-2, 0) e (2, 0)) analisando o gráfico I cuja expressão algébrica está explicitada.



a) Como é a parábola representada por II em relação a de $y=x^2$?

CÁLCULOS E ANOTAÇÕES:

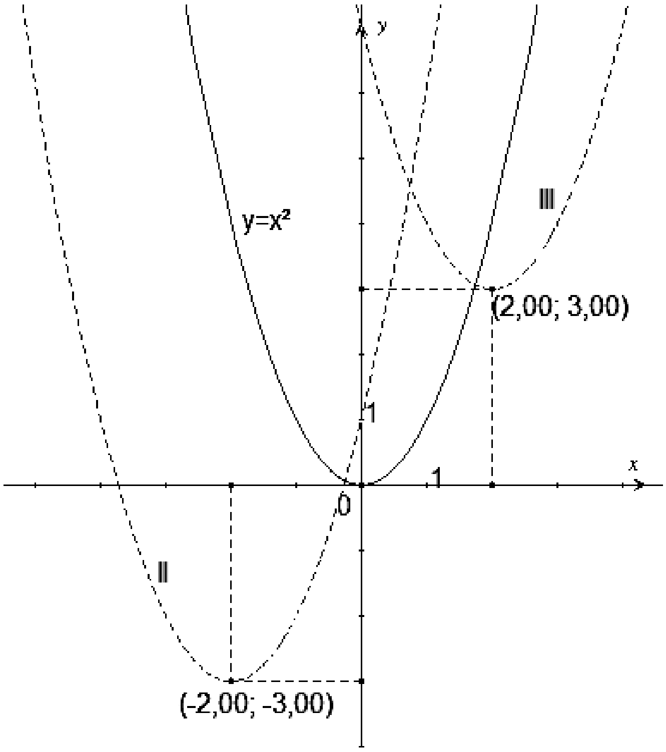
b) E a representada por III em relação a $y=x^2$?

CÁLCULOS E ANOTAÇÕES:

c) Quais são as coordenadas do vértice da parábola $y=(x-m)^2$? E da parábola $y=(x+m)^2$?

CÁLCULOS E ANOTAÇÕES:

9) Agora, observe as curvas e encontre suas respectivas equações (gráficos II e III, com coordenadas dos vértices respectivamente (-2, -3) e (2, 3)) analisando o gráfico I de expressão algébrica $y=x^2$.



a) Como é a parábola representada por II em relação a de $y=x^2$?

CÁLCULOS E ANOTAÇÕES:

b) E a representada por III em relação a $y=x^2$?

CÁLCULOS E ANOTAÇÕES:

c) E a representada por $y=(x+m)^2 + k$ em relação a $y=x^2$?

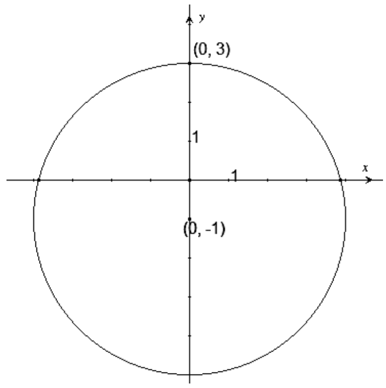
CÁLCULOS E ANOTAÇÕES:

d) Quais são as coordenadas dos vértices das parábolas representadas por $y=(x-m)^2+k$?

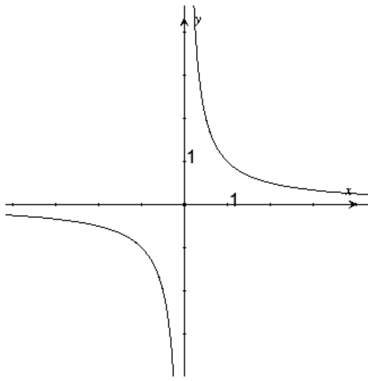
CÁLCULOS E ANOTAÇÕES:

10) Associe as equações abaixo aos seus respectivos gráficos. Em seguida, explique como você faz para fazer esta correspondência.

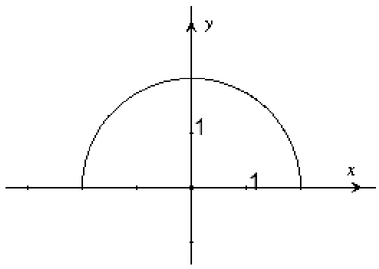
I)



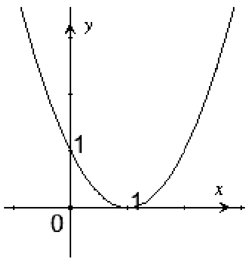
II)



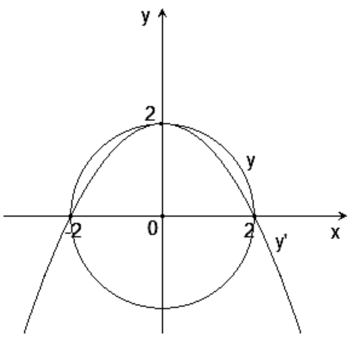
III)



IV)



V)



a) $x^2+(y+1)^2=4^2$

b) $y=\dfrac{1}{x}$

c) $y^2=-x^2+4$

d) $y=x^2-2x+1$

e) $yx-1=0$

f) $x^2+y^2+2y-15=0$

g) $x^2-y-2x+1=0$

h) $x^2+y^2-4=0$

i) $x^2+y^2=4$

j) $y=-1/2x^2+2$

APÊNDICE B - SEGUNDA FASE: ATIVIDADE 1

Nome: **Série:** **Data:**

1) Qual(is) equação(ões) corresponde(m) a curva abaixo?

i) $y = (x-2)^2 - 1$

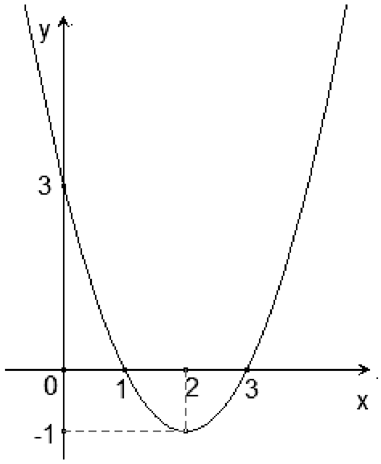
ii) $y = (x-1)(x-3)$

iii) $y = x^2 - 4x + 3$

iv) $y = 2x^2 - 4x + 3$

v) $y = 2(x-1)(x+3)$

vi) $y = (x-1)^2 + 2$



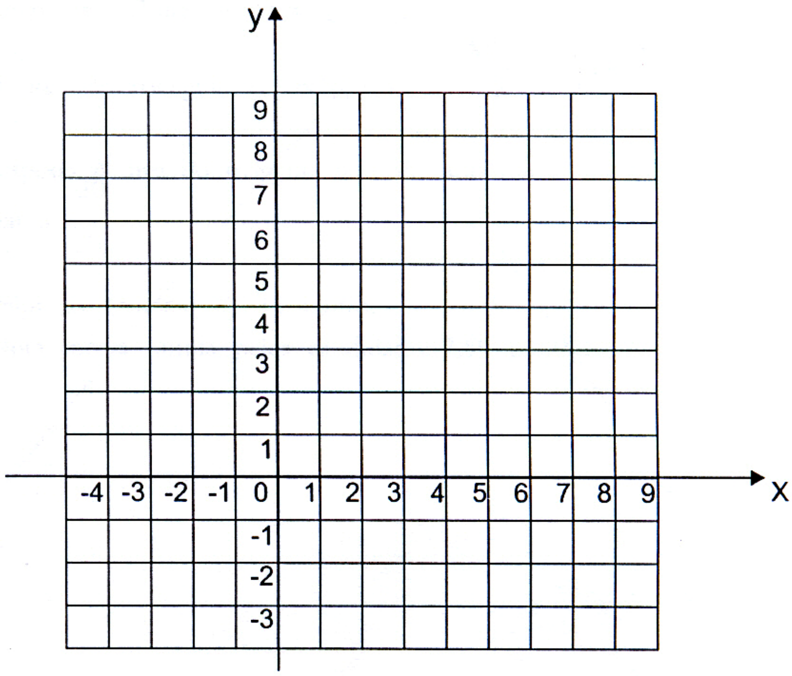
CÁLCULOS E ANOTAÇÕES:

2) Para cada uma das equações a seguir esboce seu gráfico correspondente utilizando alguns pontos que você consegue determinar.

a) $y=2x^2-10x+12$

$y=2(x-2)(x-3)$

$$y=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$$

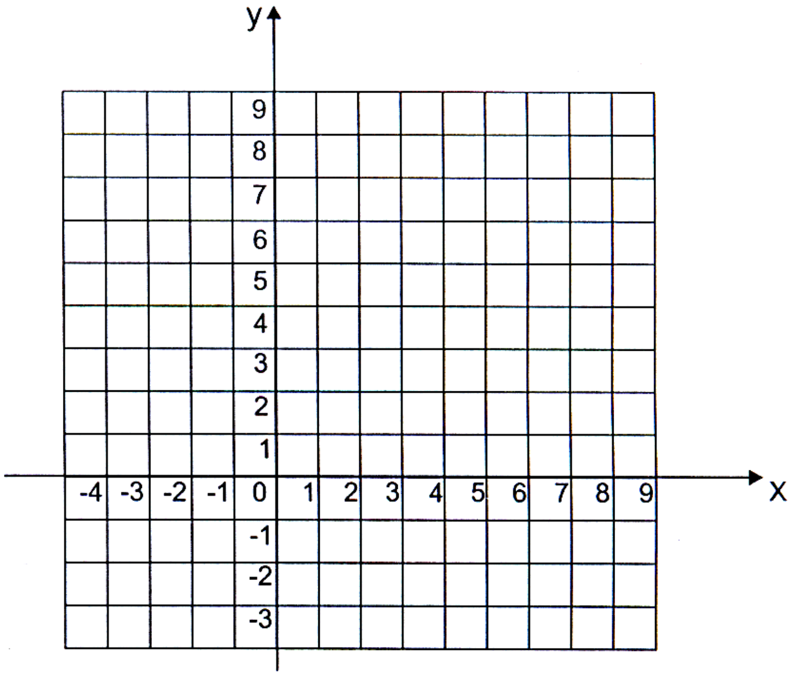


CÁLCULOS E ANOTAÇÕES:

b) $y = (x+2)^2 - 1$

$y = (x+1)(x+3)$

$y = x^2 + 4x + 3$

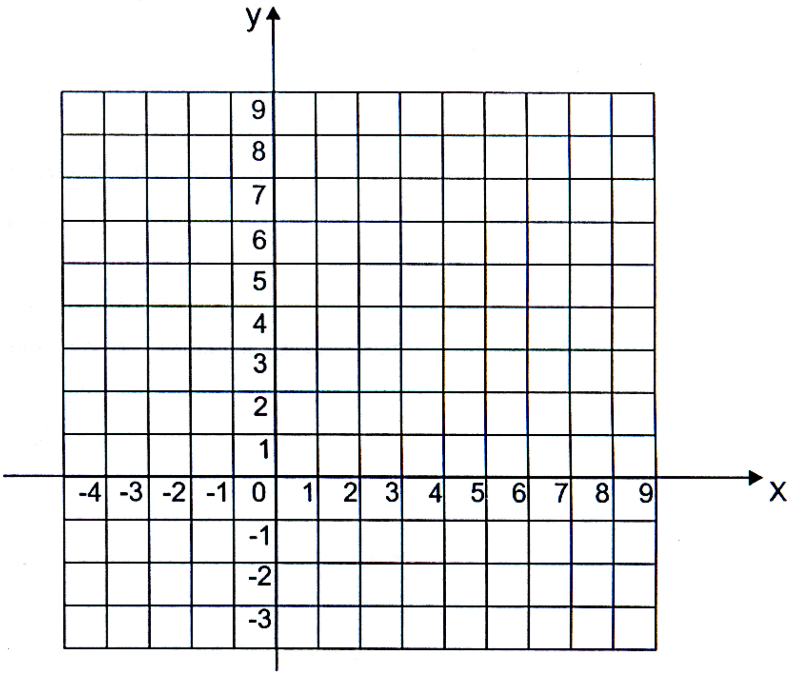


CÁLCULOS E ANOTAÇÕES:

c) $y = (x + 4 - \sqrt{10})(x + 4 + \sqrt{10})$

$y = x^2 + 8x + 6$

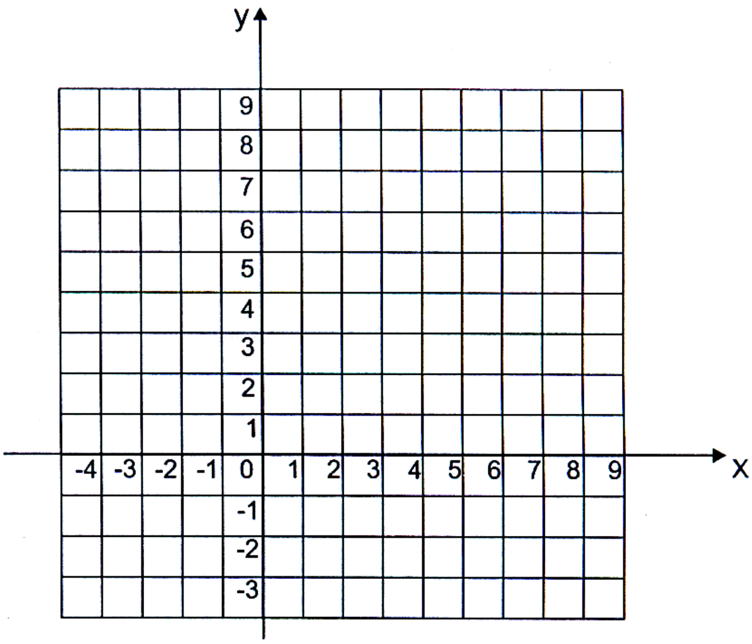
$y = (x + 4)^2 - 10$



CÁLCULOS E ANOTAÇÕES:

3) Esboce, num mesmo sistema coordenado, as curvas das seguintes equações definidas em R.

$y=x^2$ $y=x^2+2$ $y=x^2-2$



Agora responda:

a) Quais as coordenas dos vértices dessas curvas?

CÁLCULOS E ANOTAÇÕES:

b) As parábolas estão voltadas para cima ou para baixo? Por que?

CÁLCULOS E ANOTAÇÕES:

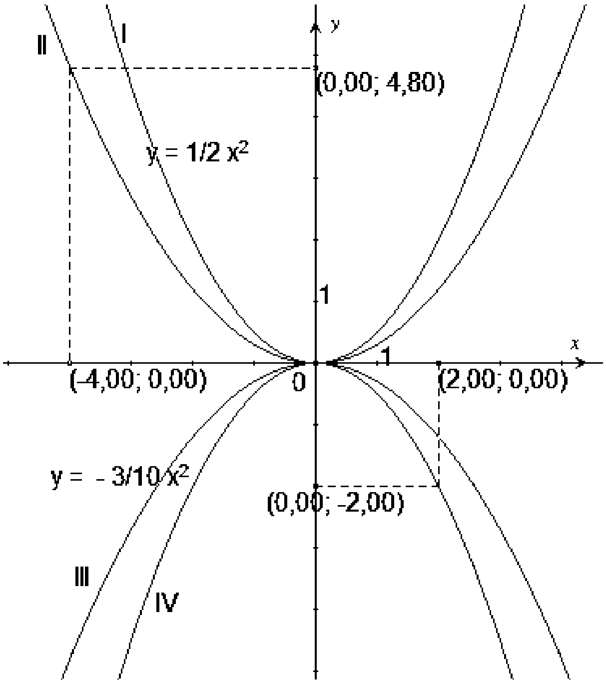
c) Todas as parábolas que você esboçou possuem o mesmo eixo de simetria? Caso afirmativo, qual é esse eixo?

CÁLCULOS E ANOTAÇÕES:

d) Como você pode obter os gráficos de $y=x^2+2$ e $y=x^2-2$ conhecendo o gráfico de $y=x^2$?

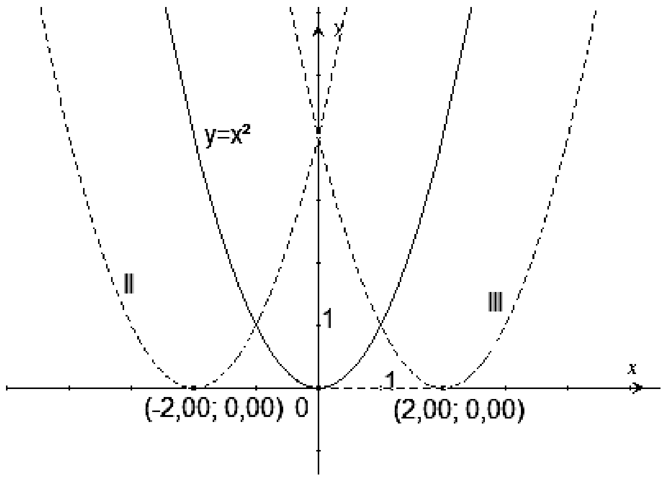
CÁLCULOS E ANOTAÇÕES:

4) Determine as equações das curvas II e IV analisando as curvas I e II.



CÁLCULOS E ANOTAÇÕES:

5) Observe as representações gráficas e encontre suas equações (gráficos II e III, com coordenadas dos vértices respectivamente (-2, 0) e (2, 0)) analisando o gráfico I cuja expressão algébrica está explicitada.



a) Como é a parábola representada por II em relação a de $y=x^2$?

CÁLCULOS E ANOTAÇÕES:

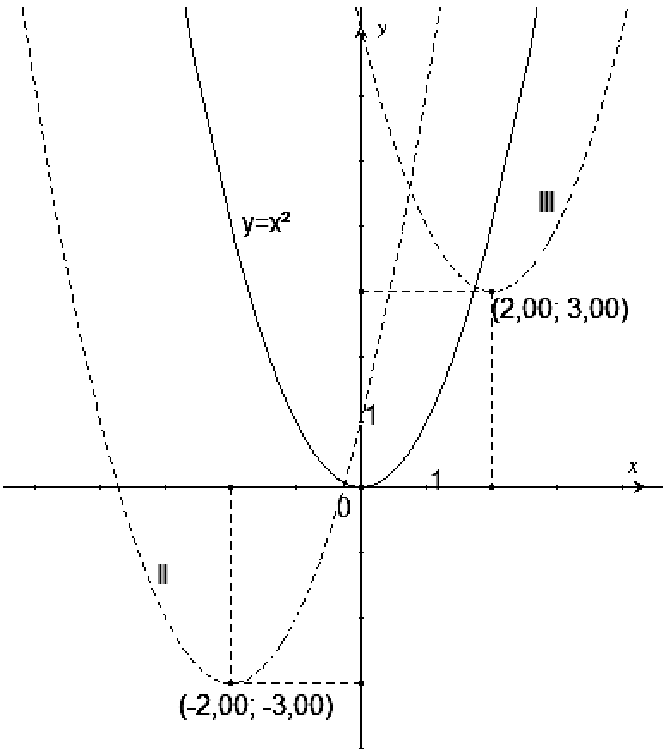
b) E a representada por III em relação a $y=x^2$?

CÁLCULOS E ANOTAÇÕES:

c) Quais são as coordenadas do vértice da parábola $y=(x-m)^2$? E da parábola $y=(x+m)^2$?

CÁLCULOS E ANOTAÇÕES:

6) Agora, observe as curvas e encontre suas respectivas equações (gráficos II e III, com coordenadas dos vértices respectivamente (-2, -3) e (2, 3)) analisando o gráfico I de expressão algébrica $y=x^2$.



a) Como é a parábola representada por II em relação a de $y=x^2$?

CÁLCULOS E ANOTAÇÕES:

b) E a representada por III em relação a $y=x^2$?

CÁLCULOS E ANOTAÇÕES:

c) E a representada por $y=(x+m)^2 + k$ em relação a $y=x^2$?

CÁLCULOS E ANOTAÇÕES:

d) Quais são as coordenadas dos vértices das parábolas representadas por $y=(x-m)^2+k$?

CÁLCULOS E ANOTAÇÕES:

APÊNDICE C - SEGUNDA FASE: ATIVIDADE 2

Nome:____ **Série:** ___________ **Data:** _____________

FORMA GEOMÉTRICA → FORMAS ALGÉBRICAS

1) Movimentando os pontos destacados no gráfico, o que ocorrerá com os coeficientes das formas algébricas desenvolvida, fatorada e canônica? Escreva o que você observa.

	Forma desenvolvida	**Forma fatorada**	**Forma canônica**
	y= ____x²____x____	**y=____(x+____)(x+____)**	**y=____(x____)²+____**
Interseção com o eixo das ordenadas			
Interseção (interseções) com o eixo das abscissas			
Coordenadas do vértice			

2) Agora, deslocando o gráfico por qualquer outro ponto, descreva o que ocorrerá com os coeficientes das formas algébricas desenvolvida, fatorada e canônica.

Forma desenvolvida	**Forma fatorada**	**Forma canônica**
$y = \_\_\_\_x^2\_\_\_\_x\_\_\_\_$	$y = \_\_\_\_(x + \_\_\_\_)(x + \_\_\_\_)$	$y = \_\_\_\_(x\_\_\_\_)^2 + \_\_\_\_$

FORMAS ALGÉBRICAS ↔ FORMA GEOMÉTRICA

3) Se modificarmos o coeficiente *a* na forma desenvolvida, quais serão as mudanças ocorridas na forma canônica, na forma desenvolvida e na sua representação gráfica (coordenadas do vértice, interseção com o eixo das abscissas e com o eixo das ordenadas, concavidade e a abertura)?

Forma desenvolvida	**Forma fatorada**	**Forma canônica**	**Forma geométrica**
y= ___x^2___x___	**y=____(x+____)(x+____)**	**y=____(x____)^2+____**	
a > 0			
a < 0			

4) O que acontece se for alterado o *a* na forma fatorada?

Forma fatorada	**Forma desenvolvida**	**Forma canônica**	**Forma geométrica**
y=__(x+__)(x+__)	**y= ___x^2___x___**	**y=____(x____)^2+____**	
a > 0			
a < 0			

5) E o que acontece se for alterado o *a* na forma canônica?

Forma canônica	**Forma fatorada**	**Forma desenvolvida**	**Forma geométrica**
$y=\_\_\_(x\_\_)^2+\_\_\_$	$y=\_\_\_\_(x+\_\_\_\_)(x+\_\_\_\_)$	$y=\_\_\_x^2\_\_\_x\_\_\_$	
$a > 0$			
$a < 0$			

6) Alterando os demais coeficientes na forma desenvolvida, quais serão as mudanças ocorridas na forma canônica, na forma fatorada e na sua representação gráfica (coordenadas do vértice, interseção com o eixo das abscissas e com o eixo das ordenadas, concavidade e a abertura)?

Forma desenvolvida	**Forma fatorada**	**Forma canônica**	**Forma geométrica**
$y= \_\_\_x^2\_\_\_x\_\_\_$	$y=\_\_\_\_(x+\_\_\_\_)(x+\_\_\_\_)$	$y=\_\_\_\_(x\_\_\_\_)^2+\_\_\_\_$	
b			
c			

7) Alterando os demais coeficientes na forma canônica, quais serão as mudanças ocorridas na forma desenvolvida, na forma fatorada e na sua representação gráfica (coordenadas do vértice, interseção com o eixo das abscissas e com o eixo das ordenadas, concavidade e a abertura)?

Forma canônica	**Forma desenvolvida**	**Forma fatorada**	**Forma geométrica**
$\mathbf{y=\_\_\_(x\_\_\_)^2+\_\_\_\_}$	$\mathbf{y=\ \_\_\_x^2\_\_\_x\_\_\_}$	$\mathbf{y=\_\_\_\_(x+\_\_\_\_)(x+\_\_\_\_)}$	
m			
k			

8) Alterando os demais coeficientes na forma fatorada, quais serão as mudanças ocorridas na forma canônica, na forma desenvolvida e na sua representação gráfica (coordenadas do vértice, interseção com o eixo das abscissas e com o eixo das ordenadas, concavidade e a abertura)?

Forma fatorada	**Forma desenvolvida**	**Forma canônica**	**Forma geométrica**
$y=\_\_(x+\_\_)(x+\_\_\_)$	$y=\ \_\_\_x^2\_\_\_x\_\_\_$	$y=\_\_\_\_(x\_\_\_\_)^2+\_\_\_\_$	
X’			
X’’			